Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 3. Векторные поля и дифференциальные формы.

1 Касательное и кокасательное расслоения

Риманова поверхность представляет собой одномерное комплексное многообразие. Над каждым — вещественным ли, комплексным ли — многообразием есть естественные расслоения. Для определенности мы будем говорить ниже о комплексных многообразиях, которые нас в первую очередь и интересуют. Прежде всего мы можем рассмотреть расслоение прямого произведения $M \times \mathbf{C}$, где M — наше многообразие. Проектирующее отображение расслоения — это проекция на первый сомножитель. Разумеется, можно рассматривать произведение многообразия и на векторное пространство большей размерности, однако эта конструкция нам пока не понадобится.

Еще два естественных расслоения, которые имеются над любым многообразием — это касательное и кокасательное расслоение. Напомним их определения.

Касательный вектор в точке t многообразия M можно определить следующими способами. Во-первых, его можно считать классом эквивалентности голоморфных отображений $D \to M$ единичного диска D в M, переводящих 0 в t. При этом два отображения γ_1, γ_2 считаются эквивалентными, если расстояние $\rho(\gamma_1(x), \gamma_2(x))$ стремится к нулю быстрее, чем x, при $x \to 0$; это означает, что

$$\lim_{x \to 0} \rho(\gamma_1(x), \gamma_2(x))/|x| = 0.$$

Метрика ρ в этом определении может быть произвольной.

Другое определение более алгебраично, однако с ним легче работать. Согласно ему, *касательным вектором* в точке t называется дифференцирование из кольца ростков в точке t в кольцо комплексных чисел. *Дифференцирование* это линейное отображение колец, удовлетворяющее *правилу Лейбница*

$$\delta(fg) = \delta(f)g(t) + f(t)\delta(g).$$

Из этого определения очевидно, например, что все касательные векторы в точке образуют векторное пространство. Размерность этого векторного пространства совпадает с размерностью многообразия. В частности, касательное пространство к кривой одномерно.

Двойственное к касательному векторному пространству называется *кокасательным*. Оно состоит из линейных функционалов на касательном пространстве, называемых также *кокасательными векторами*.

В произвольной локальной координате z на кривой касательный вектор записывается в виде ad/dz. В произвольных локальных координатах $z_1, \ldots, z_n$ на многообразии размерности n — в виде $a_1\partial/\partial z_1 + \ldots + a_n\partial/\partial z_n$. Соответственно, кокасательный вектор имеет координатное представление adz или, в общем случае, $a_1 dz_1 + \ldots + a_n dz_n$.

Совокупность касательных (соотв., кокасательных) пространств во всех точках многообразия является *касательным* (соотв., *кокасательным*) расслоением над многообразием. Касательное и кокасательное расслоение над комплексной кривой имеют *ранг один*, т.е. они *линейны*, поскольку их слои одномерны.

Определение 1.1 Линейным расслоением *на многообразии называется векторное расслоение ранга один.*

Векторное поле это совокупность касательных векторов в каждой точке многообразия. При этом вектор должен зависеть от точки многообразия голоморфно. Другими словами, это *голоморфное сечение* касательного расслоения. Соответственно, голоморфное сечение кокасательного расслоения называется *голоморфной дифференциальной* 1*-формой*. Аналогично, голоморфная функция на многообразии это голоморфное сечение тривиального линейного расслоения, т.е. прямого произведения $M \times \mathbf{C}$, рассматриваемого как расслоение над M.

В локальной координате голоморфное векторное поле и голоморфная 1-форма имеют соответственно вид

$$a(z)\frac{d}{dz} \qquad \text{и} \qquad a(z)dz,$$

где a — голоморфная функция.

Заметим, что координатное представление векторного поля и 1-формы по-разному ведет себя при замене координаты. Пусть мы выполнили замену координаты $z = g(z_1)$. Тогда в новой координате 1-форма имеет вид

$$a(z)dz = a(g(z_1))dg(z_1) = a(g(z_1))g'(z_1)dz_1.$$

Выписать преобразование векторного поля сложнее. Для этого посмотрим, как наше поле действует на функцию z_1:

$$a(z)\frac{dz_1}{dz} = a(z)\frac{dg^{-1}(z)}{dz} = \frac{a(g(z_1))}{g'(g(z_1))}.$$

Поэтому замена координаты следующим образом отражается на векторном поле:

$$a(z)\frac{d}{dz} = \frac{a(g(z_1))}{g'(z_1)}\frac{d}{dz_1}.$$

Однако голоморфные векторные поля и дифференциальные формы, также как и голоморфные функции, на компактных комплексных кривых чрезвычайно редки. Поэтому наряду с ними мы будем рассматривать и мероморфные векторные поля и функции, т.е. мероморфные сечения касательного и кокасательного расслоений. У каждой точки такого сечения, за исключением конечного числа, есть окрестность, в любой локальной координате z на которой коэффициент при d/dz (соотв., при dz) записывается в виде голоморфной функции. В отдельных же точках такому коэффициенту разрешается иметь полюса. Порядок полюса коэффициента называется *порядком полюса* мероморфного векторного поля и мероморфной функции.

Мероморфная функция это мероморфное сечение тривиального линейного расслоения. Мероморфное векторное поле можно определить также как дифференцирование из кольца мероморфных функций в себя.

2 Как задавать векторные поля и дифференциальные формы

Рассмотрим сначала случай рациональной кривой. В произвольной координате z на $\mathbf{CP}^1$ мероморфная дифференциальная форма записывается в виде $a(z)dz$, где a

— некоторая мероморфная (т.е., рациональная) функция. Замена координат $z = 1/z_1$ показывает, что и в самом деле, в точке $z = \infty$ коэффициент при dz_1 является мероморфной функцией. Аналогично, всякое мероморфное векторное поле записывается в виде $a(z)d/dz$. Посмотрим, как выглядят голоморфные дифференциальные 1-формы и векторные поля.

Рассмотрим дифференциальную 1-форму dz на $\mathbf{CP}^1$. Подстановка $z = 1/z_1$ показывает, что у такой 1-формы имеется полюс порядка 2 в точке $z = \infty$:

$$dz = -\frac{1}{z_1^2} dz_1.$$

Но это означает, что и у любой ненулевой мероморфной 1-формы есть полюса! Действительно, пусть ω — произвольная мероморфная 1-форма. Тогда ω/dz — ненулевая мероморфная функция; обозначим эту функцию через f. Тогда $\omega = f dz$, и у 1-формы есть полюса во всех тех точках, где они есть у f. Если же у f нет полюсов в точках, отличных от $z = \infty$, то у ω обязательно есть полюс в $z = \infty$. Тем самым, мы доказали, что на рациональной кривой нет ненулевых голоморфных 1-форм или, другими словами, что размерность пространства голоморфных 1-форм на $\mathbf{CP}^1$ равна нулю.

Упражнение 2.1 *Подсчитайте размерность пространства голоморфных векторных полей на* $\mathbf{CP}^1$.

На самом деле, утверждение о том, что у ненулевой мероморфной 1-формы на $\mathbf{CP}^1$ есть полюса, можно уточнить. А именно, рассмотрим порядки всех нулей и всех полюсов произвольной мероморфной 1-формы ω. Тогда разность между суммой порядков всех нулей и суммой порядков всех полюсов равна -2. Действительно, для формы dz это так, а умножение этой формы на ненулевую мероморфную функцию увеличивает сумму порядков нулей на столько же, насколько и сумму порядков полюсов.

Упражнение 2.2 *Чему равна разность суммы порядков нулей и суммы порядков полюсов мероморфного векторного поля на* $\mathbf{CP}^1$*?*

Мы увидим впоследствии, что работать с дифференциальными формами гораздо легче, чем с векторными полями; поэтому разговор будет идти в первую очередь об 1-формах на кривых.

С каждой мероморфной функцией на кривой C можно связать мероморфную 1-форму на ней. А именно, мы можем сопоставить функции f ее *дифференциал* df. Например, 1-форма dz является дифференциалом мероморфной функции z.

Упражнение 2.3 *Проверьте, что мероморфная 1-форма dz/z не является дифференциалом никакой мероморфной функции.*

Тем самым, у нас имеется линейное отображение из пространства мероморфных функций в пространство мероморфных 1-форм. Элементы образа этого отображения называются *точными* дифференциальными 1-формами. Как показывает предыдущее упражнение, не всякая мероморфная 1-форма на кривой точна.

Упражнение 2.4 *Сформулируйте простое необходимое и достаточное условие того, чтобы мероморфная 1-форма на* $\mathbf{CP}^1$ *была точна.*

Дифференциальные формы — аналогично функциям, но в отличие от векторных полей — преобразуются при отображении многообразий в направлении, обратном действию отображения. Это позволяет задавать их теми же способами, что мы использовали для задания функций.

Если наша кривая C вложена в проективное пространство, то мероморфную 1-форму на ней можно задать путем ограничения мероморфной 1-формы на объемлющем пространстве. Действительно, касательная прямая к кривой в точке естественно вложена в касательное пространство к объемлющему пространству в той же точке. Дифференциальная 1-форма представляет собой семейство линейных функционалов на касательных пространствах в каждой точке объемлющего пространства. Ограничивая ее на касательную прямую к кривой, мы получаем семейство линейных функционалов на касательных прямых к кривой, т.е. дифференциальную 1-форму на ней.

Упражнение 2.5 *Проверьте, что если мероморфная 1-форма на объемлющем пространстве является дифференциалом мероморфной функции на нем, то ее ограничение на кривую является дифференциалом ограничения функции на кривую.*

Упражнение 2.6 *Найдите порядки нулей и полюсов ограничения на кривую*

$$x^n + y^n = 1$$

дифференциальных 1-форм а) xdx, б) xdy.

Аналогично, голоморфное отображение $g : C_1 \to C_2$ комплексных кривых позволяет построить по мероморфной 1-форме ω на C_2 мероморфную 1-форму на C_1, которую мы будем обозначать $g^*\omega$. По определению, значение такой 1-формы на касательном векторе τ равно $\omega(dg(\tau))$, где $dg(\tau)$ — касательный вектор в C_2, образ вектора τ при касательном отображении dg. Это определение полностью совпадает с определением ограничения 1-формы на кривую в проективном пространстве, только вместо вложения в проективное пространство мы берем отображение в другую кривую.

Упражнение 2.7 *Рассмотрим проекцию кривой $x^2 + y^2 = 1$ на ось x. Верно ли, что любая мероморфная 1-форма на этой кривой является поднятием 1-формы с оси x при этом отображении?*

Если же, как обычно, на кривой дискретно действует группа ее автоморфизмов, то любая мероморфная 1-форма на этой кривой, *инвариантная относительно действия этой группы автоморфизмов*, опускается до мероморфной 1-формы на факторкривой. То же, впрочем, справедливо и для векторных полей.

Пример 2.8 *Рассмотрим на комплексной прямой $\mathbf{C}$ с координатой z дифференциальную 1-форму dz. Эта 1-форма инвариантна относительно сдвигов $z \mapsto z + z_0$ комплексной прямой, поэтому она опускается на любую эллиптическую кривую. (Напомним, что эллиптической кривой называется факторкривая прямой $\mathbf{C}$ по действию решетки сдвигов, натянутой на пару векторов $1, \tau \in \mathbf{C}$, где $\Re\tau > 0$.) Эта форма не имеет полюсов на $\mathbf{C}$, поэтому ее образ на любой эллиптической кривой является голоморфной 1-формой на ней. Тем самым мы построили на эллиптических кривых по голоморфной 1-форме.*

Упражнение 2.9 *Докажите, что любая голоморфная 1-форма на эллиптической кривой пропорциональна построенной выше с постоянным коэффициентом пропорциональности. Это означает, что пространство голоморфных 1-форм на эллиптической кривой одномерно над* $\mathbf{C}$.

У построенной голоморфной 1-формы на эллиптической кривой нет не только полюсов, у нее нет и ни одного нуля. Это означает, что у *любой мероморфной* 1-формы на эллиптической кривой разность суммы порядков ее нулей и суммы порядков ее полюсов равна нулю.

3 Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой

Проведенные выше вычисления показывают, что размерность пространства голоморфных 1-форм на $\mathbf{CP}^1$ равна нулю, а на эллиптической кривой она равна 1. Эти наблюдения позволяют заподозрить, что размерность этого пространства тесно связана с родом кривой. Сейчас мы приведем еще один чрезвычайно важный аргумент в пользу того, что эта размерность просто равна роду кривой. Мы докажем, что это утверждение справедливо для плоских кривых. (Напомним, что не любая кривая может быть вложена в плоскость: это условие накладывает сильные ограничения на род.)

Итак,

Теорема 3.1 *Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой равна роду этой кривой.*

Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что размерность пространства голоморфных 1-форм не меньше рода кривой. Оценку в обратную сторону проведем в следующем разделе.

Пусть d — степень плоской кривой C. Как мы знаем, в этом случае ее род равен $g = (d-1)(d-2)/2$. Мы знаем, что кривые степени 1 и 2 рациональны, и для них утверждение теоремы справедливо. В дальнейшем будем предполагать, что $d \geq 3$. Рассмотрим в проективной плоскости прямую, пересекающую кривую C в d различных точках и выберем систему координат $(x : y : z)$ таким образом, чтобы уравнением выбранной прямой было $z = 0$.

Рассмотрим теперь пространство S^{d-3} однородных многочленов степени $d-3$ от переменных x, y, z. Это векторное пространство над полем комплексных чисел.

Упражнение 3.2 *Докажите, что размерность этого пространства равна* $(d-1)(d-2)/2$.

Мы построим по каждому такому многочлену голоморфную 1-форму на C, причем построенное отображение из S^{d-3} в пространство голоморфных 1-форм будет линейным и инъективным. Пусть кривая C задается однородным уравнением $F(x, y, z) = 0$ степени d, которое в карте $z = 1$ имеет вид $f(x, y) = 0$.

Сопоставим произвольному однородному многочлену $G(x, y, z)$ многочлен $g(x, y) = G(x, y, 1)$ и дифференциальную 1-форму

$$\frac{g\,dx}{\partial f/\partial y}.$$

Эта 1-форма определена в тех точках плоскости, в которых частная производная многочлена f по y не обращается в нуль, и ее ограничение на C в этих точках является голоморфной 1-формой. Что происходит в тех точках, где $\partial f/\partial y = 0$? В силу того, что дифференциал многочлена f на кривой C равен нулю, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

мы заключаем, что

$$\frac{dx}{\partial f/\partial y} = -\frac{dy}{\partial f/\partial x}$$

на кривой. Тем самым, выписанная выше дифференциальная 1-форма на кривой может быть переписана в виде

$$-\frac{gdy}{\partial f/\partial x}.$$

Поскольку кривая C гладкая, обе частные производные по x и по y не могут обратиться в нуль в одной точке этой кривой, а значит указанная 1-форма голоморфна на аффинной части кривой.

Проверим теперь, что если степень многочлена G равна $d-3$, то построенная 1-форма голоморфно продолжается в точки пересечения кривой C с прямой $z = 0$. Перейдем от координат $(x : y : 1)$ к координатам $(1 : u : v)$, т.е. выполним замену

$$x = 1/v; \qquad y = u/v.$$

В координатах u, v наша 1-форма примет вид

$$-\frac{g(\frac{1}{v}, \frac{u}{v})\frac{dv}{v^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{v}, \frac{u}{v})},$$

или, после умножения на v^{d-1},

$$-\frac{v^{d-3}g(\frac{1}{v}, \frac{u}{v})dv}{v^{d-1}\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{v}, \frac{u}{v})}.$$

Числитель последнего выражения есть многочлен, поскольку степень многочлена g равна $d-3$, а знаменатель есть не что иное как производная по u функции $F(1, u, v)$. Если она случайно равна 0, то мы можем перейти к производной по v, как мы это уже делали, заменяя y на x, если производная по y оказывалась равной нулю. Поэтому частное представляет собой отношение многочлена и функции, отличной от нуля в выбранной точке, а значит не может иметь в ней полюса. Поэтому все 1-формы, которые строятся по многочленам степени $d-3$, голоморфны.

Отображение, сопоставляющее многочлену 1-форму, является линейным отображением векторных пространств. Его ограничение на пространство многочленов степени $d-3$ инъективно, т.е. не имеет ядра. Действительно, многочлен при таком отображении переходит в нуль только в том случае, если он тождественно равен нулю на кривой C. Для многочленов степени $d-3$ это невозможно, поскольку степень кривой C есть $d > d-3$. Поэтому на плоской кривой степени d есть по меньшей мере столько линейно независимых 1-форм, какова размерность пространства однородных многочленов степени $d-3$ от 3 переменных.

Замечание 3.3 *Выбор сопоставления многочлену 1-формы неслучаен. На самом деле, на проективной плоскости имеется выделенная* 2-форма ω, *которая в карте* $z = 1$ *имеет координатную запись* $dx \wedge dy$. *Теперь мы можем сопоставить многочлену 1-форму на кривой по правилу*

$$g \mapsto \frac{g\omega}{df}.$$

Проведенные выше рассуждения означают, что указанная 1-форма определена корректно, а если степень многочлена g *не превосходит* $d - 3$, *то она является и голоморфной 1-формой на кривой. Такая 1-форма (и ее многомерные обобщения) называется* формой Гельфанда–Лере.

4 Интегрирование 1-форм

Таким образом, осталось доказать, что размерность пространства голоморфных 1-форм не больше рода кривой. Принципиальным моментом здесь является возможность проинтегрировать 1-форму по вещественной кривой на поверхности. Зафиксируем на кривой C точку x_0 и рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую $\gamma : [0, 1] \to C$, $\gamma(0) = x_0$. Тогда для этой кривой определен интеграл

$$\int_\gamma \omega$$

от любой 1-формы ω. При этом, согласно формуле Стокса, интеграл зависит лишь от гомотопического класса кривой γ в пространстве кривых с фиксированными концами. Если мы будем немного менять конец $\gamma(1)$ кривой, не меняя ее гомотопического типа, то интеграл станет функцией от второго конца кривой.

Если 1-форма ω является точной, $\omega = df$ для некоторой функции f, то ее интеграл по любому замкнутому (с общими началом и концом) пути равен нулю.

Рассмотрим теперь какой-нибудь набор замкнутых путей $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ с началом и концом в точке x_0, классы которых образуют базис в группе одномерных гомологий $H_1(C, \mathbf{Z})$.

Лемма 4.1 *Пусть* ω — *вещественная 1-форма на поверхности* C. *Если интегралы* $\int_{\gamma_i} \omega$ *1-формы* ω *по всем циклам* γ_i, $i = 1, \ldots, 2g$, *равны нулю, то форма* ω *точна,* $\omega = df$. *При этом если форма* ω *голоморфна, то и функция* f *голоморфна.*

Доказательство стандартно: мы строим по 1-форме ω функцию f по правилу

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \omega.$$

Этот интеграл не зависит от выбора пути, соединяющего точки x_0 и x из-за условия на интегралы по циклам. Лемма доказана.

Теперь мы знаем, что размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой не превосходит $2g$. Действительно, каждой такой 1-форме мы можем сопоставить набор ее интегралов по циклам γ_i. Если у двух голоморфных 1-форм все интегралы совпадают, то их разность имеет нулевые интегралы, а значит является дифференциалом голоморфной функции. Но поскольку на компактной кривой нет непостоянных

голоморфных функций, эта разность равна нулю. Поэтому пространство голоморфных 1-форм не более, чем $2g$-мерно. Мы же хотим доказать, что оно не более, чем g-мерно.

Для этого наряду с голоморфными формами ω рассмотрим сопряженные с ними антиголоморфные формы $\bar{\omega}$. Мы хотим доказать, что если голоморфные 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_k$ линейно независимы, то классы когомологий 1-форм $\omega_1, \ldots, \omega_k$, $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_k$ линейно независимы. Отсюда будет следовать нужное нам неравенство.

Необходимое нам утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.2 *Если для пары голоморфных 1-форм ω_1, ω_2 на C сумма $\omega_1 + \bar{\omega}_2$ является дифференциалом гладкой функции f, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$.*

Доказательство леммы остается в качестве упражнения.