**Высший Колледж Математики**

**Римановы поверхности и алгебраические кривые**
**Лекция 5. Формула Римана–Роха и следствия из нее.**

# 1 Вокруг формулы Римана–Роха

*Упражнение 1.1.* Выведите из теоремы Римана–Роха решение задачи Миттаг–Леффлера: для набора главных частей $p_1, \dots, p_n$ в точках $x_1, \dots, x_n$ кривой $C$ мероморфная функция с таким набором главных частей в этих точках, не имеющая других полюсов, существует в том и только в том случае, если

$$\mathrm{Res}_{x_1} p_1 \omega + \mathrm{Res}_{x_n} p_n \omega = 0$$

для любой голоморфной 1-формы $\omega$ на $C$. Здесь под *главной частью* функции в полюсе мы понимаем сумму «членов отрицательной степени» ее разложения в окрестности полюса: главная часть функции, имеющей разложение

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

в окрестности полюса порядка $k$ в произвольной координате $z$, равна

$$\frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z}.$$

Точнее говоря, две функции $f_1, f_2$ имеют одинаковую главную часть в своем общем полюсе, если их разность $f_1 - f_2$ не имеет полюса. Главной же частью называется класс эквивалентности функций с полюсами относительно такого отношения эквивалентности. Поскольку вычет 1-формы $f\omega$ в полюсе функции $f$ определяется главной частью этой функции, корректно определен и вычет произведения главной части на голоморфную 1-форму.

# 2 Рациональная кривая

До сих пор мы часто упоминали о том, что проективная прямая $\mathbf{CP}^1$ — единственная комплексная кривая рода нуль. Теорема Римана–Роха позволяет доказать это утверждение.

**Теорема 2.1.** *Любая гладкая компактная комплексная кривая нулевого рода изоморфна* $\mathbf{CP}^1$.

**Доказательство.** Возьмем на комплексной кривой нулевого рода дивизор $D$, состоящий из одной точки $x$, взятой с кратностью 1. Размерность $i(D)$ пространства мероморфных 1-форм с нулем в точке $x$ равна нулю, поскольку степень канонического дивизора на кривой рода $g = 0$ равна $2g - 2 = -2$. Теорема Римана–Роха дает для размерности пространства $L(D)$ мероморфных функций на такой кривой с полюсом не выше первого порядка в точке $x$ размерность

$$l(D) = d - g + i(D) + 1 = 1 - 0 + 0 + 1 = 2.$$

Выбрав в двумерном пространстве $L(D)$ базис из двух функций $f_0, f_1$, первая из которых константа, $f_0 = 1$, мы получаем мероморфную функцию $f_1$ на нашей кривой. Степень этой функции равна 1, поскольку у нее один полюс первого порядка, а значит она осуществляет биголоморфное отображение на проективную прямую, что и требовалось.

## 3 Эллиптические кривые

Мы хотим показать, что всякая эллиптическая кривая представляется плоской кубической кривой.

**Теорема 3.1.** *Любую эллиптическую кривую, т.е. кривую, гомеоморфную тору, можно вложить в проективную плоскость.*

Из формулы для рода плоской кривой вытекает теперь, что степень вложенной эллиптической кривой равна 3.

**Доказательство.** Как мы знаем, размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой рода 1 равна 1. При этом образующая пространства голоморфных 1-форм не имеет нуля, поэтому на эллиптической кривой нет нетривиальных голоморфных 1-форм с нулями и без полюсов. Вычислим размерность пространства мероморфных функций с фиксированным полюсом не выше первого порядка, не имеющих других полюсов. По теореме Римана–Роха эта размерность равна

$$d - g + i(D) + 1 = 1 - 1 + 0 + 1 = 1,$$

т.е. все такие функции — константы. А вот функции с одним полюсом порядка два существуют. Действительно, для дивизора $D = 2x$

$$l(D) = d - g + i(D) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Поэтому на эллиптической кривой существует мероморфная функция с полюсом порядка два в любой наперед заданной точке, не имеющая других полюсов. Поднятие такой функции на комплексную прямую $\mathbf{C}$, как и исходная функция, определено однозначно с точностью до прибавления константы и умножения на константу и сдвига. Одна из этих функций называется *функцией Вейерштрасса.* Это простейшая из *эллиптических функций.*

Функция Вейерштрасса $\mathcal{P}(z)$ выделяется своим разложением при $z = 0$. Она имеет в этой точке полюс порядка 2, а коэффициент при $1/z$ в этом разложении равен 0, поскольку иначе 1-форма $\mathcal{P}(z)dz$ имела бы ненулевой вычет в нуле. Отсюда вытекает, что функция Вейерштрасса четная: иначе функция $\mathcal{P}(z)-\mathcal{P}(-z)$ была бы непостоянной голоморфной функцией на кривой. Добавив к $\mathcal{P}(z)$ при необходимости аддитивную константу, мы можем считать, что разложение в нуле имеет вид

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots.$$

Поскольку функция Вейерштрасса определена на $\mathbf{C}$, определена и ее производная $\mathcal{P}'(z)$, которая также опускается на соответствующую эллиптическую кривую. Производная функции Вейерштрасса имеет разложение

$$\mathcal{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \dots.$$

Посмотрим теперь на функцию

$$4\mathcal{P}^3(z) - (\mathcal{P}'(z))^2.$$

Это четная функция, а ее разложение в точке $z = 0$ имеет в ней полюс второго порядка. Поэтому эта функция представляется в виде линейной комбинации функции Вейерштрасса и единичной функции. Тем самым, справедливо тождественное равенство

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4\mathcal{P}^3(z) + a\mathcal{P}(z) + b$$

для некоторых констант $a$ и $b$. Другими словами, тройка функций $(\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z), 1)$, образующая базис в пространстве $L(3 \cdot 0)$, определяет отображение эллиптической кривой в плоскую кубическую кривую. Поскольку первая из этих функций четна, а вторая нечетна, отображение является взаимно-однозначным на свой образ. Комплексные числа $a$ и $b$ в этом представлении являются параметрами кривой; они зависят от выбранной решетки (т.е. от вектора $\tau$ в верхней полуплоскости).

Образ этого отображения задается в аффинной карте $z = 1$ уравнением

$$y^2 = 4x^3 + ax + b.$$

Проекция этой кубической кривой на ось $x$ совпадает с функцией Вейерштрасса на эллиптической кривой, а проекция на ось $y$ — с ее производной.

*Упражнение 3.2.* Проверьте, что для любых двух точек на эллиптической кривой существует мероморфная функция степени 2, имеющая в этих точках полюса первого порядка. Выразите эту функцию через функцию Вейерштрасса.

*Упражнение 3.3.* Верно ли, что любой дивизор степени нуль на эллиптической кривой является а) главным (т.е. дивизором некоторой мероморфной функции); б) каноническим (т.е. дивизором некоторой мероморфной 1-формы)?

# 4 Гиперэллиптические кривые и кривые рода 2

Напомним, что каноническим отображением кривой $C$ рода $\geq 2$ называется ее отображение $\varphi : x \mapsto (\omega_1(x) : \ldots : \omega_g(x))$ в проективное пространство $\mathbf{CP}^{g-1}$, заданное выбором базиса $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ в пространстве голоморфных 1-форм на $C$.

Докажем сначала, что не существует такой точки на кривой $C$, в которой все голоморфные 1-формы обращаются в нуль одновременно. Действительно, если бы такая точка $x$ существовала, то, по теореме Римана–Роха, существовала бы мероморфная функция на $C$ с полюсом первого порядка в этой точке (и без других полюсов):

$$l(x) = 1 - g + i(x) + 1 = 2, \text{ поскольку } i(x) = g.$$

Это означало бы, что наша кривая рациональна.

**Теорема 4.1.** *Если*

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

*для двух различных точек $x_1, x_2$ кривой $C$, то эта кривая гиперэллиптическая, т.е. на ней существует мероморфная функция степени 2.*

**Доказательство.** Поскольку значения голоморфных 1-форм в точке $x_2$ пропорциональны их значениям в точке $x_1$ с коэффициентом пропорциональности, общим для всех 1-форм, размерность пространства голоморфных 1-форм с нулем в точке $x_1$ совпадает с размерностью пространства голоморфных 1-форм с нулями в точках $x_1, x_2$. Поэтому теорема Римана–Роха дает значение 2 для размерности пространства мероморфных функций с полюсами не выше первого порядка в точках $x_1, x_2$:

$$2 - g + (g - 1) + 1 = 2.$$

Тем самым, существует такая непостоянная мероморфная функция, а ее степень равна 2.

*Упражнение 4.2.* Верно ли, что на гиперэллиптической кривой каноническое отображение имеет степень 2?

*Упражнение 4.3.* Докажите, что если для двух точек $x_1, x_2$ на кривой (которая в этом случае с необходимостью является гиперэллиптической) существует функция с полюсами первого порядка в этих точках и без других полюсов, то каноническое отображение переводит эти две точки в одну.

**Теорема 4.4.** *Всякая комплексная кривая рода 2 гиперэллиптична.*

**Доказательство.** Каноническое отображение кривой рода 2 является разветвленным накрытием проективной прямой, поэтому не может быть изоморфизмом на образ, значит кривая гиперэллиптична.

*Упражнение 4.5.* Всякая мероморфная функция степени 2 на комплексной кривой определяет на этой кривой инволюцию: автоморфизм второго порядка, переставляющий местами прообразы каждой точки из $\mathbf{CP}^1$. Неподвижные точки этой инволюции — критические точки функции. Найдите размерность пространства $L(D)$ мероморфных функций на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$ для случаев а) $D = 2x$, где $x$ — неподвижная точка инволюции; б) $D = 2x$, где $x$ не является неподвижной точкой инволюции; в) $D = x_1 + x_2$, где точки $x_1, x_2$ образуют орбиту инволюции; г) $D = x_1 + x_2$, где точки $x_1, x_2$ не образуют орбиту инволюции.

## 5 Вычисление Римана

Теорема Римана–Роха позволяет подсчитать — по крайней мере грубо — размерность пространства кривых данного рода. Мы знаем размерность пространства кривых рода 0 — она равна нулю, и размерность пространства кривых рода 1 — она равна 1. Соответствующее вычисление для кривых рода $g \geq 2$ проделано Риманом.

Рассмотрим пространство мероморфных функций степени $d$ на кривых рода $g$. У общей функции из этого пространства все точки ветвления простые. По формуле Римана–Гурвица число этих простых точек ветвления равно $2d + 2g - 2$. Это означает, что *размерность пространства мероморфных функций степени $d$ на кривой рода $g$ равна $2d + 2g - 2$.* Действительно, теорема Римана показывает, что число мероморфных функций с фиксированными точками ветвления и заданными в них порядками ветвления конечно, поэтому пространство таких функций локально параметризуется их точками ветвления. А значит, его размерность равна размерности пространства таких точек.

Тем самым, мы знаем размерность пространства мероморфных функций с $d$ полюсами порядка не выше первого на кривых произвольного рода $g$. С другой стороны, мы можем подсчитать, по теореме Римана–Роха, размерность пространства таких функций на каждой отдельной кривой рода $g$. При $d \geq 2g$ эта размерность равна $2d - g + 1$. Действительно, у голоморфного дифференциала на кривой рода $g$ имеется $2g - 2$ нулей, поэтому $i(D) = 0$ для любого дивизора $D$ степени, не меньшей $2g - 1$. Группа автоморфизмов кривой рода $g$ (а, значит, и пространства мероморфных функций на ней) конечна. Поэтому размерность пространства кривых рода $g \geq 2$ равна

$$(2d + 2g - 2) - (2d - g + 1) = 3g - 3.$$

Естественный способ сделать подобную формулу «общей», т.е. распространить ее также на кривые рода 0 и 1, состоит в том, чтобы сделать эти кривые «жесткими», «убив» их непрерывные автоморфизмы. Такой эффект достигается, если рассматривать кривые с отмеченными точками. Отметим на кривой $n$ точек $x_1, \dots, x_n$, и будем считать две кривые с отмеченными точками изоморфными, если существует биголоморфное отображение одной из них на другую, переводящее отмеченные точки в отмеченные.

*Замечание 5.1.* Существует два варианта этой конструкции. В первом отмеченные точки различаются между собой, во втором они неразличимы. Соответственно, в первом варианте изоморфизмами считаются такие биголоморфизмы, которые переводят каждую отмеченную точку в точку с такой же отметкой, а во втором изоморфизм может переставлять отмеченные точки. В дальнейшем мы будем рассматривать только первый вариант.

На кривых рода $g \geq 2$ добавление очередной отмеченной точки повышает размерность пространства таких кривых на единицу: размерность пространства кривых рода $g$ с $n$ отмеченными точками равна $3g - 3 + n$. Это утверждение верно и для кривых младших родов, однако начиная с некоторого количества добавленных точек. Эллиптические кривые ($g = 1$) приобретают жесткость уже при добавлении одной отмеченной точки, и размерность пространства таких кривых с $n$ отмеченными точками равна $3g - 3 + n = n$ при $n \geq 1$. Для того, чтобы стала жесткой рациональная кривая, на ней надо отметить три точки: для любых двух упорядоченных троек точек на рациональной кривой существует единственный автоморфизм кривой, переводящий первую точку во вторую с сохранением порядка. При $n \geq 3$ размерность пространства рациональных кривых с $n$ отмеченными точками также равняется $3g - 3 + n = n - 3$. Локальными координатами на этом пространстве могут служить координаты точек $x_4, \dots, x_n$ относительно координаты, в которой $x_1 = \infty$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

## 6 Гиперэллиптические кривые и кривые рода 3

Теперь нетрудно усмотреть, что не всякая кривая рода 3 является гиперэллиптической. Действительно, на всякой гиперэллиптической кривой рода $g$ существует мероморфная функция степени 2. По формуле Римана–Гурвица, у такой функции $2g + 2$ простых критических значений. На пространстве критических значений действует группа дробно-линейных преобразований образа, размерность которой равна 3. Функции, переходящие друг в друга при такой замене, определены на одной и той же гиперэллиптической кривой. Поэтому пространство гиперэллиптических кривых рода $g$ имеет размерность $2g-1$.

При $g=2$ размерность $2g-1=3$ пространства гиперэллиптических кривых совпадает с размерностью $3g-3=3$ пространства всех кривых, что согласуется с доказанным нами ранее утверждением о том, что всякая кривая рода 2 гиперэллиптическая. При $g=3$ размерность пространства всех кривых равна $3g-3=6$, тогда как гиперэллиптические кривые лишь образуют подмногообразие размерности $2g-1=5$, т.е. гиперповерхность, в этом пространстве.

Плоская кривая степени $d=4$ имеет род $(d-1)(d-2)/2=3$. Посмотрим, всякая ли кривая рода 3 реализуется таким образом. Каноническое отображение отправляет кривую рода 3 в плоскость. На негиперэллиптических кривых каноническое отображение является изоморфизмом на образ, поэтому всякая негиперэллиптическая кривая рода 3 вкладывается в плоскость. Степень образа канонического отображения равна 4, поскольку иначе этот образ представлял бы кривую другого рода.

*Упражнение 6.1.* Вычислите размерность пространства гладких плоских кривых степени 4 и проверьте тем самым, что почти всякая такая кривая является образом канонического отображения кривой рода 3.

*Упражнение 6.2.* Докажите, что не всякая комплексная кривая кривая рода 10 реализуется как плоская кривая.