Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 9. Расслоения на пространствах модулей

1 О топологии пространств модулей

У нас есть представление о том, как выглядят пространства модулей стабильных кривых в простейших случаях: $\overline{\mathcal{M}}_{0;3}$, $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$, $\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$.

Упражнение 1.1. Покажите, что $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ представляет собой проективную плоскость, раздутую в четырех точках общего положения.

Что можно сказать о топологии более сложных пространств? Вообще, в каких терминах ее можно описывать?

Прежде всего хотелось бы научиться описывать когомологии пространств модулей — числа Бетти и, что гораздо сложнее, структуру кольца в когомологиях.

Пример 1.2. Из приведенного выше упражнения вытекает, что числа Бетти пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ таковы:

$$\beta_0 = \beta_4 = 1, \quad \beta_1 = \beta_3 = 0, \quad \beta_2 = 5.$$

Действительно, у проективной плоскости равны 1 нулевое, второе и четвертое числа Бетти, а первое и третье равны нулю. Мы же вклеили в проективную плоскость четыре проективных прямых, увеличив тем самым на 4 второе число Бетти.

Числа Бетти пространств модулей рациональных кривых с отмеченными точками допускают достаточно явное описание, см. ниже. Однако пространства модулей кривых старших родов являются лишь орбиобразиями, и перед нами возникает нетривиальный вопрос, что такое когомологии и числа Бетти орбиобразия.

В каких терминах можно описывать структуру кольца когомологий компактного многообразия? Прежде всего, нужно указать образующие этого кольца. В качестве образующих могут выступать классы когомологий, представленные различными компактными подмногообразиями в исследуемом многообразии. Каждое такое подмногообразие S коразмерности k описывает класс целочисленных k-мерных когомологий, значение которого на цикле (подмногообразии) T размерности k равно числу $S \cdot T$ точек пересечения многообразий S и T. (Если циклы S и T пересекаются нетрансверсально, то нужно заменить цикл T циклом T', представляющим тот же гомологический класс и имеющим трансверсальное пересечение с S.)

В пространствах модулей есть естественные кандидаты на многообразия, представляющие базисные когомологические классы. Прежде всего, это *граничные страты*. Напомним, что границей компактифицированного пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ называется подмногообразие особых кривых, $\partial\overline{\mathcal{M}}_{g;n} = \overline{\mathcal{M}}_{g;n} \setminus \mathcal{M}_{g;n}$. Это подмногообразие стратифицировано — каждому стабильному модулярному графу соответствует страт кривых, имеющих этот модулярный граф. Замыкание такого страта и представляет соответствующий класс когомологий. Известно, например, что кольцо когомологий пространств модулей рациональных кривых с отмеченными точками порождено классами стратов комплексной коразмерности один. Эти страты соответствуют простейшим вырождениям рациональных кривых — разбиениям на две неприводимые компоненты.

Замечание 1.3. Похоже, что кольца когомологий всех пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ порождены классами размерности 2 или, во всяком случае, классами малой размерности. Мне неизвестно, действительно ли это так, а также возможные причины этого явления.

Другой вид естественно возникающих когомологических классов — это характеристические классы различных расслоений на пространстве модулей. Этим расслоениям будет посвящен отдельный раздел.

2 Об эйлеровой характеристике пространств модулей

Из всех топологических инвариантов проще всего (после размерности) подсчитывать эйлерову характеристику, но даже она была вычислена сравнительно недавно. Легче всего разбираться с пространством модулей рациональных кривых с отмеченными точками, поскольку оно является настоящим многообразием, а не орбиобразием.

Многообразие $\mathcal{M}_{0;3}$ гладких кривых с тремя отмеченными точками представляет собой точку, поэтому его эйлерова характеристика равна 1. Эйлерова характеристика многообразия $\mathcal{M}_{0;4} = \mathbf{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ равна -1. Вообще, эйлерова характеристика многообразия $\mathcal{M}_{0;n+1}$ вычисляется по индукции. Это многообразие изоморфно универсальной кривой $\mathcal{C}_{0;n}$, поэтому оно расслоено над $\mathcal{M}_{0;n}$, причем слоем расслоения является рациональная кривая с n выколотыми точками: забываемая точка x_{n+1} не может совпадать ни с одной из отмеченных точек $x_1, \dots, x_n$. Поэтому $\chi(\mathcal{M}_{0;n+1}) = -(n-2)\chi(\mathcal{M}_{0;n})$, или $\chi(\mathcal{M}_{0;n}) = (-1)^{n-3}(n-3)!$.

Эйлеровы характеристики пространств модулей стабильных рациональных кривых легко вычисляются по эйлеровым характеристикам (некомпактных) пространств модулей гладких рациональных кривых. Именно, рассмотрим экспоненциальные производящие функции для последовательностей этих эйлеровых характеристик

$$x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\chi(\mathcal{M}_{0;n+1}) = x - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$$

и

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\chi(\overline{\mathcal{M}}_{0;n+1}).$$

Тогда, согласно Гетцлеру, они взаимно обратны относительно операции композиции функций. Более того, аналогичное утверждение верно и если заменить эйлеровы характеристики на многочлены Пуанкаре соответствующих пространств. (Напомним, что *многочленом Пуанкаре* топологического пространства называется производящий многочлен для его чисел Бетти.) Приведенное выше описание пространств модулей гладких рациональных кривых позволяет легко найти многочлены Пуанкаре для них:

$$P_{\mathcal{M}_{0;n+1}}(q) = \sum \dim H^k(\mathcal{M}_{0;n+1}, \mathbf{C})q^k = (q^2-2)(q^2-3)\dots(q^2-n+1),$$

что согласуется с нашим вычислением эйлеровых характеристик:

$$\chi(\mathcal{M}_{0;n+1}) = P_{\mathcal{M}_{0;n+1}}(-1) = (-1)^{n-2}(n-2)!.$$

Отсюда легко вычисляются первые многочлены Пуанкаре компактифицированных пространств

$$1, 1+q^2, 1+5q^2+q^4, 1+16q^2+16q^4+q^6, 1+42q^2+127q^4+42q^6+q^8,$$

первые три из которых нам были уже известны. Отметим, что эти многочлены являются возвратными (последовательности их коэффициентов симметричны).

Упражнение 2.1. Важная нерешенная проблема — вычисление многочленов Пуанкаре для подпространств «симметричных» когомологий, т.е. когомологий, инвариантных, относительно действия симметрической группы.

Прежде, чем определять эйлерову характеристику орбиобразия, дадим формальное определение орбиобразия.

Определение 2.2. *Гладким d-мерным комплексным орбиобразием* называется хаусдорфово топологическое пространство M, на котором задан атлас $\langle U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, \phi_\alpha \rangle$, где

- множество $\{U_\alpha\}$ представляет собой покрытие пространства M открытыми множествами, образующими базу его топологии;
- множество $\{V_\alpha\}$ представляет собой набор открытых подмножеств в $\mathbf{C}^d$;
- каждое из множеств $\{G_\alpha\}$ является конечной группой автоморфизмов множества V_α;
- всякое $\phi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$ является непрерывным отображением, слои которого совпадают с орбитами действия группы G_α.

При этом должны выполняться следующие условия согласования: для любой пары α, β, таких, что $U_\alpha \subset U_\beta$, существует такой инъективный гомеоморфизм $h_{\alpha\beta} : G_\alpha \to G_\beta$ и такое гладкое вложение $\phi_{\alpha\beta} : V_\alpha \to V_\beta$, что

- для всех $g \in G_\alpha$ и $x \in V_\alpha$ имеет место равенство $\phi_{\alpha\beta}(gx) = h_{\alpha\beta}(g)\phi_{\alpha\beta}(x)$;
- для всех $x \in V_\alpha$ справедливо равенство $\phi_\beta(\phi_{\alpha\beta})(x) = \phi_\alpha(x)$.

В частности, факторпространство комплексного многообразия по действию конечной группы (или даже по дискретному действию бесконечной группы) является орбиобразием.

Эйлерову характеристику орбиобразия O можно определить двумя способами. Во-первых, предположим, что мы можем разбить орбиобразие на открытые клетки, каждая из которых представляет собой факторпространство вида $\mathbf{R}^k/G$, где G — некоторая конечная группа. Тогда положим

$$\chi(O) = \sum \frac{(-1)^k}{|G|}.$$

Это означает, в частности, что если орбиобразие получено факторизацией многообразия по действию конечной группы, то его эйлерова характеристика равна частному эйлеровой характеристики факторизуемого многообразия и порядка группы.

Во-вторых, мы можем представить всякое орбиобразие O в виде несвязного объединения, по всем конечным группам G, подмногообразий O_G, состоящих из точек, у каждой из которых есть окрестность вида $\mathbf{R}^k/G$. Положим

$$\chi(O) = \sum_G \frac{\chi(O_G)}{|G|}.$$

Упражнение 2.3. Вычислите эйлерову характеристику пространства модулей $\mathcal{M}_{1;1}$ эллиптических кривых с отмеченной точкой, понимаемого как факторпространство верхней полуплоскости по действию группы $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$, согласно двум определениям. Проверьте, что в обоих случаях результат будет равен $-\frac{1}{12}$.

Упражнение 2.4. Докажите, что в тех случаях, когда оба определения применимы, они дают один и тот же результат.

Эйлеровы характеристики пространств модулей гладких кривых с одной отмеченной точкой произвольного рода были вычислены Харером и Загиром:

Теорема 2.5 (Харер, Загир). *Имеет место равенство*

$$\chi(\mathcal{M}_{g;1}) = \zeta(1-2g) = -\frac{B_{2g}}{2g};$$

здесь ζ *— это дзета функция Римана, а* B_{2g} *—* $2g$*-ое число Бернулли, т.е. коэффициент в разложении*

$$\frac{e^x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_4}{4!}x^4 + \dots,$$

$B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$.

Это глубоко нетривиальный результат (впоследствии передоказанный разными людьми).

Эйлерова характеристика пространств модулей гладких кривых с произвольным числом отмеченных точек вычисляется индуктивно на основе теоремы Харера–Загира с использованием забывающего расслоения $\mathcal{M}_{g;n+1} \to \mathcal{M}_{g;n}$ аналогично тому, как мы это делали для рациональных кривых. Это расслоение дает рекуррентное соотношение

$$\chi(\mathcal{M}_{g,n+1}) = \chi(\mathcal{M}_{g;n})(2-2g-n),$$

поскольку эйлерова характеристика слоя — кривой рода g с n выколотыми точками — равна $2-2g-n$. Отметим, что отрицательность этой эйлеровой характеристики эквивалентна стабильности кривой.

3 Когомологические классы, ассоциированные с векторными расслоениями на пространствах модулей кривых

Помимо граничных стратов когомологические классы на многообразии можно задавать как характеристические классы естественных векторных расслоений на этом многообразии. Проще всего характеристические классы определяются для линейных расслоений (т.е. для расслоений с одномерным слоем). Первый класс Черна голоморфного векторного расслоения L на многообразии M — это препятствие к существованию голоморфного сечения у такого расслоения. Первый класс Черна тривиального линейного расслоения равен нулю. Для определения первого класса Черна линейного расслоения достаточно взять его произвольное мероморфное сечение: класс когомологий, представленный дивизором нулей и полюсов такого сечения, не зависит от выбора сечения. Более того, дивизор нулей и полюсов определен однозначно с точностью до рациональной эквивалентности подмногообразий: разность двух таких дивизоров, отвечающих различным сечениям, является главным дивизором — дивизором нулей и полюсов некоторой мероморфной функции (эта функция — отношение сечений, которое корректно определено в любом линейном расслоении). Другими словами, первый класс Черна линейного расслоения корректно определен не только как элемент группы вторых когомологий, но и как элемент *группы Чжоу* — группы классов рациональной эквивалентности подмногообразий. Как правило, кольцо Чжоу является более тонким — но и более трудно вычислимым — инвариантом алгебраического многообразия, чем кольцо когомологий.

С i-ой отмеченной точкой можно связать линейное расслоение $\mathcal{L}_i$ на пространстве модулей кривых с отмеченными точками. Слоем этого расслоения над точкой $(C; x_1, \ldots, x_n)$ является кокасательная прямая к кривой C в точке x_i (можно было бы взять и касательную прямую — получилось бы двойственное расслоение, однако кокасательная прямая удобнее с точки зрения построения сечений и когомологических классов). При вырождении кривых в классе стабильных кривых отмеченные точки не становятся особыми, поэтому расслоения $\mathcal{L}_i$ продолжаются и на пространство стабильных кривых. Их первые классы Черна обозначаются через ψ_i: $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$.

Построим классы ψ_i на пространствах рациональных кривых с небольшим числом отмеченных точек. На $\overline{\mathcal{M}}_{0;3}$ все три класса равны нулю, поскольку многообразие базы является точкой. Построим сечение расслоения $\mathcal{L}_1$ на $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. Для этого рассмотрим на гладкой рациональной кривой с отмеченными точками x_1, x_2, x_3, x_4 мероморфную 1-форму ω с полюсами первого порядка в точках x_3, x_4, имеющую вычеты $\mathrm{Res}_{x_3}\omega = 1$, $\mathrm{Res}_{x_4}\omega = -1$ и не имеющую других полюсов. Такая 1-форма единственна и нигде не обращается в нуль (в подходящей координате она записывается в виде dz/z). Ее значение $\omega(x_1)$ в точке x_1 определяет сечение расслоения $\mathcal{L}_1$. Это сечение не обращается ни в нуль, ни в бесконечность ни для какой гладкой кривой.

Продолжим теперь построенное сечение на граничные точки пространства модулей $\mathcal{M}_{0;4}$. Таких точек всего три, и они соответствуют особым кривым. На кривой $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\}$ 1-форма ω выглядит так: она имеет полюса первого порядка с указанными вычетами на неприводимой компоненте, содержащей точки x_3, x_4, и она тождественно равна нулю на второй неприводимой компоненте; это означает, что $\omega(x_1) = 0$. На кривой же $\{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$ эта 1-форма имеет такой вид: на первой компоненте она имеет полюса первого порядка в x_3 и в точке пересечения первой компоненты со второй, причем вычеты равны соответственно 1 и -1; на второй компоненте она имеет полюса первого порядка в точке пересечения с первой компонентой и в точке x_4, причем с теми же вычетами. Значит значение построенной 1-формы в точке x_1 отлично от нуля. В третьей точке границы рассуждение аналогично. Тем самым, построенное нами сечение имеет единственный нуль — в одной из граничных точек компактифицированного пространства модулей — и не имеет полюсов.

Упражнение 3.1. Проверьте, что построенное сечение пересекает нулевое сечение расслоения $\mathcal{L}_1$ трансверсально.

Поскольку пересечение происходит в единственной точке и это пересечение трансверсально, мы заключаем что эта точка представляет класс когомологий $\psi_1 \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;4})$.

Упражнение 3.2. Какая точка будет представлять класс когомологий ψ_3, если построить сечение по 1-форме с полюсами в точках x_2, x_4?

Упражнение 3.3. Постройте представителя когомологий класса ψ_1 на пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$.

Классы когомологий можно умножать. Умножению классов соответствует пересечение подмногообразий, представляющих эти классы. Если взять классы (или подмногообразия) в достаточном количестве, то мы получим в произведении старший класс когомологий (представленный конечным количеством точек пересечения). В этом случае мы говорим об интеграле произведения классов. Интеграл

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{m_1} \dots \psi_n^{m_n}$$

отличен от нуля только, если $m_1 + \ldots + m_n = \dim \overline{\mathcal{M}}_{g;n} = 3g - 3 + n$. В частности, мы видели, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;4}} \psi_1 = 1.$$

Упражнение 3.4. Подсчитайте

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1^2, \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1 \psi_2,$$

а также все возможные интегралы от произведений классов ψ по пространству $\overline{\mathcal{M}}_{0;6}$.

Упражнение 3.5. Докажите, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;n}} \psi_1^{m_1} \dots \psi_n^{m_n} = \begin{pmatrix} n-3 \\ m_1 \dots m_n \end{pmatrix} = \frac{(n-3)!}{m_1! \dots m_n!}$$

при $m_1 + \ldots + m_n = n - 3$.

Индекс пересечения классов на орбиобразиях уже не обязательно целый.

Упражнение 3.6. Построив подходящее сечение расслоения $\mathcal{L}_1$ на $\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$, проверьте, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1;1}} \psi_1 = \frac{1}{24}.$$

Значения индексов пересечения классов ψ на пространствах модулей кривых произвольного рода являются предметом гипотезы Виттена, доказанной Концевичем. Эта гипотеза дает простые рекуррентные соотношения на эти индексы. Этих данных, однако, недостаточно для полного описания колец когомологий пространств модулей.