Часть 1. Векторные пространства

Определение 1.1. Пусть K — поле. Всякий K-модуль называется векторным пространством над полем K или K-векторным пространством. Элементы векторного пространства V называются векторами.

Лемма 1.2. *Пусть K — поле, а множество S порождает векторное пространство V. Тогда существует подмножество $S' \subset S$, являющееся базисом в V.*

Доказательство: пусть $S' \subset S$ — максимальное линейно независимое множество[1]. Докажем, что оно является базисом. Заметим, что по определению S' линейно независимо, так что остается проверить, что S' порождает V. Действительно, возьмем произвольный элемент $s \in S \setminus S'$. Ясно, что множество $S' \cup \{ s \}$ не является линейно независимым, следовательно существует линейная зависимость $a_s s + \sum_{t \in S'} a_t t = 0$. Ясно, что $a_s \neq 0$, так как иначе множество S' было бы линейно зависимым. Следовательно, $a_s \in K$ — обратим! Умножая на a_s^{-1} получаем $s = \sum_{t \in S'} (-a_s^{-1} a_t) t$. Таким образом, мы доказали, что подмодуль $KS' \subset V$ содержит все множество S, следовательно $KS' = KS = V$. □

Замечание 1.3. Аналогично доказывается, что если множество S порождает V, а подмножество $S_0 \subset S$ — линейно независимо, то существует подмножество $S_0 \subset S' \subset S$, являющееся базисом в V. Для этого достаточно взять за S' максимальное линейно независимое подмножество в S, содержащее S_0.

Следствие 1.4. *Всякое векторное пространство V обладает базисом. Всякое линейно независимое подмножество в V может быть дополнено до базиса. Если V — конечно порождено, то V обладает базисом из конечного числа элементов.*

Лемма 1.5. *Пусть V — векторное пространство, $U, W \subset V$ — произвольные подпространства. Тогда $U + W = \{ v \in V \mid v = u + w,\ u \in U,\ w \in W \}$ и $U \cap W$ — подпространства в V.*

Лемма 1.6. *Пусть $U, W \subset V$ — подпространства, такие что $U + W = V$ и $U \cap W = \{ 0 \}$. Тогда всякий вектор $v \in V$ единственным образом раскладывается в сумму $v = u + w$, где $u \in U$ и $w \in W$. В частности, $V \cong U \oplus W$.*

Доказательство: разложимость следует из того, что $V = U + W$. Предположим, что $u + w = u' + w'$. Тогда $u - u' = w' - w$. Но левая часть лежит в U, а правая в W, следовательно этот вектор лежит в $U \cap W = \{ 0 \}$. Значит $u' = u$ и $w' = w$ и разложение единственно. Рассмотрим теперь отображение $f : U \oplus W \to V$, $(u, w) \mapsto u + w \in V$. Легко видеть, что f — изоморфизм векторных пространств. □

В такой ситуации говорят, что пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств U и W, а подпространство W называется дополнительным подпространством к U в V.

Теорема 1.7. *Для всякого подпространства U в векторном пространстве V существует дополнительное подпространство.*

Доказательство: выберем базис $\{ u_i \}$ в U, дополним его до базиса $\{ u_i \} \cup \{ w_j \}$ в V и положим $W = K\{ w_j \}$. Очевидно, что $U + W = V$ и $U \cap W = \{ 0 \}$. □

Заметим, что как разложение в прямую сумму, так и выбор дополнительного подпространства зависят от выбора базиса, то есть *не являются каноническими*!

Замечание 1.8. В доказательстве приведенных выше утверждений коммутативность не используется. Следовательно, все утверждения справедливы также для модулей над произвольным телом.

---

[1] Если множество S конечно, то существование такого S' очевидно. Если же S бесконечно, надо воспользоватьмя леммой Цорна, то есть проверить, что для всякой возрастающей цепочки $S'_1 \subset S'_2 \subset \dots \subset S'_n \subset \dots$ линейно независимых подмножеств в S найдется линейно независимое подмножество S', такое что $S'_i \subset S'$ при всех i. Действительно, возьмем $S' = \bigcup_{i=1}^{\infty} S'_i$. Если $\sum_{p=1}^{m} a_p s_p = 0$ — линейное соотношение, в котором $s_1, \dots, s_m \in S'$, то найдется i, такое что $s_1, \dots, s_m \in S'_i$, следовательно $a_1 = \dots = a_m = 0$, так как S'_i линейно независимо. Значит S' линейно независимо.

Часть 2. Базисы и размерность

Определение 2.1. Пусть (e_i) — произвольный набор векторов в векторном пространстве V, Говорят, что набор векторов (e'_i) получен из набора (e_i) элементарным преобразованием, если

либо (i) набор (e'_i) является транспозицией набора (e_i);

либо (ii) $$e'_i = \begin{cases} \lambda e_{i_0}, & i = i_0 \\ e_i, & i \neq i_0 \end{cases}$$, где i_0 — произвольно и $\lambda \in K$ — обратим;

либо (iii) $$e'_i = \begin{cases} e_{i_0} + \lambda e_{i_1}, & i = i_0 \\ e_i, & i \neq i_0 \end{cases}$$, где i_0, i_1 и $\lambda \in K$ — произвольны.

Лемма 2.2. *Пусть набор векторов (e'_i) в векторном пространстве V получен из набора (e_i) элементарным преобразованием. Тогда (e_i) — линейно независим (порождает V, является базисом в V) тогда и только тогда, когда соответствующие свойства выполнены для набора (e'_i).*

Доказательство: легко проверить, что наличие линейной зависимости между векторами e'_i влечет наличие линейной зависимости между векторами e_i. Следовательно, если векторы e_i линейно независимы, то и векторы e'_i линейно независимы. Далее, любой из векторов e_i выражается через векторы e'_i. Значит векторы e'_i порождают пространство V, если векторы e_i его порождали. Более того, отсюда следует, что если e_i образуют базис, то e'_i тоже образуют базис. Наконец, легко видеть, что набор (e_i) сам получается элементарным преобразованием из набора (e'_i), следовательно обратные утверждения также верны. $\square$

Определение 2.3. Пусть (x_{ij}) — матрица с коэффициентами в произвольном кольце A. Говорят, что матрица (x'_{ij}) получена из матрицы (x_{ij}) элементарным преобразованием строк, если

либо (i) матрица (x'_{ij}) получена произвольной транспозицией строк матрицы (x_{ij});

либо (ii) $$x'_{ij} = \begin{cases} \lambda x_{i_0 j}, & i = i_0 \\ x_{ij}, & i \neq i_0 \end{cases}$$, где i_0 — произвольно и $\lambda \in A$ — обратим;

либо (iii) $$x'_{ij} = \begin{cases} x_{i_0 j} + \lambda x_{i_1 j}, & i = i_0 \\ x_{ij}, & i \neq i_0 \end{cases}$$, где i_0, i_1 и $\lambda \in A$ — произвольны.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов матрицы.

Замечание 2.4. Любое элементарное преобразование строк матрицы (x_{ij}) получается левым умножением некоторой обратимой матрицы на матрицу (x_{ij}). Любое элементарное преобразование столбцов матрицы (x_{ij}) получается правым умножением некоторой обратимой матрицы на матрицу (x_{ij}).

Определение 2.5. Матрица (x_{ij}) размера $n \times m$ называется

верхнеступенчатой, если $x_{ij} = 0$ при $j < l_i$ и $x_{il_i} = 1$, если $l_i \leqslant m$, где $1 \leqslant l_1 < l_2 < \cdots < l_n$;

нижнеступенчатой, если $x_{ij} = 0$ при $i < l_j$ и $x_{l_j j} = 1$, если $l_j \leqslant n$, где $1 \leqslant l_1 < l_2 < \cdots < l_m$;

стандартной, если $x_{ii} = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant r$ и $x_{ij} = 0$ иначе, где $1 \leqslant r \leqslant m, n$.

Лемма 2.6. *Любая матрица с коэффициентами в поле элементарными преобразованиями строк может быть приведена к верхнеступенчатому виду, элементарными преобразованиями столбцов — к нижнеступенчатому виду, а если использовать и те и другие преобразования — то к стандартному виду.*

Докажем первое утверждение. Пусть (x_{ij}) — произвольная матрица. Пусть $l_1 = \min\{\, j \mid x_{ij} \neq 0 \,\}$ и пусть $x_{i_1, l_1} \neq 0$. Пусть (x'_{ij}) получена из (x_{ij}) перестановкой 1-ой и i_1-ой строки (элементарное преобразование первого типа); (x''_{ij}) получена из (x'_{ij}) умножением первой строки на $(x'_{1l_1})^{-1}$ (элементарное преобразование второго типа), а матрица (x'''_{ij}) получена из (x''_{ij}) прибавлением к i-ой строке первой строки, умноженной на $-x''_{il_1}$, где $i = 2, \ldots, n$ (последовательность элементарных преобразований третьего типа). Применяя ту же процедуру еще $n - 1$ раз, приводим матрицу к верхнеступенчатому виду. Второе и третье утверждения доказываются аналогично. $\square$

Пусть (e_i) — базис в векторном пространстве V. Всякий вектор $v \in V$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Элементы $x_i \in K$ называются координатами вектора

v относительно базиса e_i. Вектор v удобно записывать в виде столбца из его координат. Соответственно, всякий набор векторов $v_1, \dots, v_m$ можно представить в виде $n \times m$ матрицы (x_{ij}), j-ый столбец которой состоит из координат вектора v_j.

Лемма 2.7. *Пусть (x_{ij}) — матрица координат набора векторов $v_1, \dots, v_m$ в векторном пространстве V относительно базиса $e_1, \dots, e_n$. Тогда элементарные операции над строками матрицы (x_{ij}) соответствуют элементарным преобразованиям базиса (e_i), а элементарные операции над столбцами матрицы (x_{ij}) соответствуют элементарным преобразованиям набора векторов (v_j).*

Доказательство: непосредственна проверка. □

Следствие 2.8. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в V, а $v_1, \dots, v_m$ — линейно независисмы. Тогда $m \leqslant n$. Если же $m = n$, то $v_1, \dots, v_m$ — базис в V.*

Доказательство: выберем последовательность элементарных преобразований строк и столбцов матрицы координат набора векторов $v_1, \dots, v_m$ относительно базиса $e_1, \dots, e_n$, приводящую ее к стандартному виду и применим соответствующие последовательности элементарных преобразований к базису (e_i) и набору (v_j). Пусть (e'_i) и (v'_j) — полученные наборы. Тогда из леммы 2.2 следует, что e'_i — базис, а набор v'_j — линейно независим. С другой стороны, по лемме 2.7 матрица координат набора векторов v'_j относительно базиса e'_i имеет стандартный вид. Следовательно, $v'_i = e'_i$ при $1 \leqslant i \leqslant r$ и $v'_i = 0$ при $r < i \leqslant m$. Значит $m = r \leqslant n$. Более того, если $m = r = n$, то $v'_i = e'_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, следовательно $v'_1, \dots, v'_m$ образуют базис, значит по лемме 2.2 векторы $v_1, \dots, v_m$ тоже образуют базис. □

Следствие 2.9. *Количество векторов во всех базисах векторного пространства V одинаково.*

Определение 2.10. Количество векторов в любом из базисов векторного пространства V называется размерностью V и обозначается $\dim V$.

Лемма 2.11. *Если $U \subset V$, то $\dim U \leqslant \dim V$, причем, если $\dim U = \dim V < \infty$, то $U = V$. Если $V = U \oplus W$, то $\dim V = \dim U + \dim W$.*

Доказательство: первое утверждение следует из 2.8. Пусть $V = U \oplus W$. Выберем базис $\{ u_i \}$ в U и базис $\{ w_j \}$ в W. Тогда $\{ u_i \} \cup \{ w_j \}$ — базис в $U \oplus W$. □

Часть 3. Гомоморфизмы

Определение 3.1. Гомоморфизм векторных пространств над K — это гомоморфизм K-модулей, то есть гомоморфизм абелевых групп, коммутирующий с умножением на K. Ядро гомоморфизма $f : U \to V$ — это $\operatorname{Ker} f := \{ u \in U \mid f(u) = 0 \} \subset U$, а образ — это $\operatorname{Im} f := \{ v \in V \mid v = f(u),\ u \in U \}$.

Как обычно, выполнены свойства:

Лемма 3.2. *Пусть $f : U \to V$ — гомоморфизм векторных пространств. Тогда f является мономорфизмом $\iff \operatorname{Ker} f = \{ 0 \}$; f является эпиморфизмом $\iff \operatorname{Im} f = V$.*

Теорема 3.3. *Пусть V — векторное пространство над K, $U \subset V$ — подпространство. Факторгруппа V/U обладает структурой K-векторного пространства: $\lambda(v + U) = \lambda v + U$, $\lambda \in K$. Более того, проекция $f : V \to V/U$ является эпиморфизмом векторных пространств, причем $\operatorname{Ker} f = U$.*

Векторное пространство V/U называется факторпространством V по U.

Теорема 3.4. *Пусть $f : U \to V$ — гомоморфизм колец. Тогда $U/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$* (канонический изоморфизм).

Следствие 3.5. (*i*) *Если $f : U \to V$ — эпиморфизм колец, то $V \cong U/\operatorname{Ker} f$.* (*ii*) *Всякий гомоморфизм колец $f : U \to V$ раскладывается в композицию канонических эпиморфизма, изоморфизма и мономорфизма $U \to U/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f \to V$.*

Важным свойством векторных пространств является

Лемма 3.6. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в V, а $u_1, \dots, u_n$ — произвольный набор векторов в U. Тогда существует единственный гомоморфизм $f : V \to U$, такой что $f(e_i) = u_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Замечание 3.7. Свойства 3.2–3.5 выполнены для гомоморфизмов модулей над произвольным фиксированным кольцом, в частности для абелевых групп, а свойство 3.6 для свободного модуля V над любым кольцом.