Часть 1. Линейные отображения и матрицы

Пусть $A : V \to U$ — линейное отображение K-векторных пространств. Выберем базисы $f_1, \dots, f_m$ и $e_1, \dots, e_l$ в V и U соответственно. Разложим каждый из векторов $A(f_j) \in U$ по базису e_i:

$$A(f_j) = \sum_{i=1}^{l} a_{ij} e_i, \qquad a_{ij} \in K. \tag{1.1}$$

Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей отображения A относительно базисов e_i и f_j.

Лемма 1.2. *Формула* (1.1) *задает биекцию* $\mathrm{Hom}_K(U, V) \cong \mathrm{Mat}_{l\times m}(K)$.

Доказательство: Заметим сначала, что если $A : V \to U$ — линейное отображение с матрицей A, то $A(\sum_{j=1}^m x_j f_j) = \sum_{j=1}^m x_j A(f_j) = \sum_{j=1}^m x_j (\sum_{i=1}^l a_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^l (\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j) e_i$, значит матрица определяет отображение однозначно. Более того, приведенное вычисление показывает, как по всякой матрице построить линейноне отображение, матрицей которого она являеся. □

Замечание 1.3. Как $\mathrm{Hom}_K(U, V)$, так и $\mathrm{Mat}_{l\times m}(K)$ являются векторными пространствами над полем K, а биекция (1.1) — линейна.

Пусть W — еще одно векторное пространство с базисом $g_1, \dots, g_n$, а $B : W \to V$ — линейное отображение с матрицей $B = (b_{jk})$.

Лемма 1.4. *Произведение матриц* $A \cdot B$ *является матрицей композиции отображений* $A \circ B : W \to U$ *относительно базисов* e_i *и* g_k.

Доказательство: $(A \circ B)(g_k) = A(B(g_k)) = A(\sum_{j=1}^m b_{jk} f_j) = \sum_{i=1}^l (\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}) e_i$. □

Пусть $e_1, \dots, e_l$ и $e'_1, \dots, e'_l$ — два базиса в пространстве U, а $X = (x_{ij})$ и $X' = (x'_{ij})$ — матрицы координат векторов e'_i относительно базиса e_i и векторов e_i относительно базиса e'_i соответственно. Тогда

$$e_i = \sum_{j=1}^{l} x'_{ij} e'_j = \sum_{j=1}^{l} x'_{ij} (\sum_{k=1}^{l} x_{jk} e_k) = \sum_{k=1}^{l} (\sum_{j=1}^{l} x'_{ij} x_{jk}) e_k, \quad e'_i = \sum_{j=1}^{l} x_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{l} x_{ij} (\sum_{k=1}^{l} x'_{jk} e'_k) = \sum_{k=1}^{l} (\sum_{j=1}^{l} x_{ij} x'_{jk}) e'_k,$$

следовательно $X' \cdot X = X \cdot X' = E$, значит $X' = X^{-1}$. Матрица координат базиса e'_i относительно базиса e_i называется матрицей перехода от базиса e_i к базису e'_i. Предыдущие вычисления доказывают

Лемма 1.5. *Матрица перехода от базиса* e_i *к базису* e'_i *обратима; обратной к ней является матрица перехода от базиса* e'_i *к базису* e_i.

Пусть $e_1, \dots, e_m$ и $e'_1, \dots, e'_m$ — два базиса в U, $f_1, \dots, f_n$ и $f'_1, \dots, f'_n$ — два базиса в V, а X и Y — матрицы перехода от базисов e_i и f_i к базисам e'_i и f'_i — соответственно. Пусть далее $A : V \to U$ — линейное отображение, а A — его матрица относительно базисов f_i и e_i.

Лемма 1.6. *Матрица отображения* A *относительно базисов* f'_i *и* e'_i *равна* $X^{-1} \cdot A \cdot Y$.

Доказательство: по лемме 1.5 матрица $X^{-1} = (x'_{ij})$ является матрицей перехода от базиса e'_i к базису e_i, поэтому

$$A(f'_l) = A(\sum_{k=1}^{n} y_{kl} f_k) = \sum_{k=1}^{n} y_{kl} A(f_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{jk} y_{kl} e_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} a_{jk} y_{kl} e'_i.$$

□

Следствие 1.7. *Если* e_i *и* e'_i *— базисы в* V *с матрицей перехода* X*, а* $A : V \to V$ *— линейный оператор с матрицей* A *относительно базиса* e_i*, то матрица оператора* A *относительно базиса* e'_i *равана* $X^{-1} \cdot A \cdot X$.

Часть 2. След, определитель и характеристический многочлен.

Определение 2.1. Пусть $A = (a_{ij})$ — $n \times n$ матрица с коэффициентами в поле K. Следом, определителем и характеристическим многочленом матрицы A называются выражения

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in K, \qquad \det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right) \in K, \qquad \chi_A(t) = \det(tE_n - A) \in K[t],$$

где E_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Примеры 2.2. 1. Если $n = 2$, то $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A$.
2. Если $n = 3$, то $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Лемма 2.3. *Определитель является полилинейной знакопеременной функцией строк (столбцов) матрицы. Иначе говоря, если $A_1, \dots, A_n$ — строки матрицы A, то*

$$\det(\dots, A_i' + \lambda A_i'', \dots) = \det(\dots, A_i', \dots) + \lambda \det(\dots, A_i'', \dots) \qquad \text{(полилинейность)},$$
$$\text{если } A_i = A_j \text{ при } i \neq j, \text{ то } \det(A_1, \dots, A_n) = 0 \qquad \text{(знакопеременность)},$$

и аналогично по отношению к столбцам.

Доказательство: полилинейность определителя по строкам следует из того, что каждое из слагаемых в формуле — полилинейно. Если же $A_i = A_j$, то слагаемые, соответствующие перестановкам σ и $\sigma \circ (ij)$ сокращаются, отсюда следует знакопеременность. Что касается полилинейности и знакопеременности по столбцам, то они доказываются аналогично с помощью формулы $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} \right)$, которая следует из того, что $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ для любой перестановки σ. □

Замечание 2.4. Из знакопеременности и полилинейности следует кососимметричность: действительно, имеем

$$\begin{aligned}\det(\dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots) &= \det(\dots, A_i, \dots, A_i, \dots) + \det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) \\ &\quad + \det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots) + \det(\dots, A_j, \dots, A_j, \dots),\end{aligned}$$

причем левая часть, а также первое и четвертое слагаемые правой части равны нулю, откуда немедленно следует, что $\det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = -\det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$.

Следствие 2.5. *Если у матрицы две строки (столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю.*

Теорема 2.6. *Если $D : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ — полилинейная знакопеременная функция строк матрицы, то $D(A) = \det(A)D(E_n)$.*

Доказательство: обозначим через e_i строку длины n с единицей на i-ом месте и нулями в сотальных местах. Тогда i-ая строка матрицы A равна $A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$. Следовательно, в силу полилинейности имеем $D(A_1, \dots, A_n) = D(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}e_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}e_j) = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} (\prod_{i=1}^{n} a_{ij_i}) D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$. Далее, в силу знакопеременности, все слагаемые, для которых $(j_1, \dots, j_n)$ не является перестановкой множества $\{1, \dots, n\}$ равны нулю, а для любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ имеем в силу кососимметричности $D(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)D(e_1, \dots, e_n) = \varepsilon(\sigma)D(E_n)$. Значит $D(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}) D(E_n) = \det(A)D(E_n)$. □

Теорема 2.7. *Имеем* $\det(A \cdot B) = \det A \det B$, $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$.

Доказательство: зафиксируем матрицу B и рассмотрим отображение $D : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$, $A \mapsto \det(AB)$. Легко видеть, что строки матрицы $C = AB$ имеют вид $C_i = A_i \cdot B$, то есть линейно зависят от строк матрицы A. Поэтому D является полилинейной функцией строк матрицы A. Кроме того, если $A_i = A_j$, то $C_i = C_j$, поэтому D является знакопеременной функцией строк матрицы A. Следовательно, по теореме 2.6 имеем $D(A \cdot B) = \det(A)D(E)$, но $D(E) = \det(E \cdot B) = \det(B)$ по определению фунции D. Значит $\det(A \cdot B) = \det A \det B$.

Со следом все еще проще — легко видеть, что $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}a_{ji} = \operatorname{tr}(B \cdot A)$. □

Следствие 2.8. *Если матрица X обратима, то* $\operatorname{tr}(X^{-1}AX) = \operatorname{tr} A$, $\det(X^{-1}AX) = \det A$, $\chi_{X^{-1}AX}(t) = \chi_A(t)$.

Следствие 2.9. *След, определитель и характеристический многочлен матрицы оператора не зависят от выбора базиса в векторном пространстве.*

Тем самым, имеет смысл говорить о следе, определителе и характеристическом многочлене оператора.

Часть 3. Формула обращения матрицы

Определение 3.1. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$ с коэффициентами в K. Пусть $I \subset \{1, \dots, m\}$, $J \subset \{1, \dots, n\}$ — k-элементные подмножества. Определитель подматрицы $A_{IJ} = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ называется минором матрицы A порядка k.

Примеры 3.2. Миноры порядка 1 — это коэффициенты матрицы; минор порядка n — определитель.

Пусть $A = (A_{ij})$ — квадратная матрица. Обозначим через A_{ij} матрицу, полученную вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца в матрице A.

Лемма 3.3. *Для любого i имеем $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \det A$, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i} a_{ki} \det A_{ki} = \det A$.*

Доказательство: следует из определения. □

Следствие 3.4. *Если $i \neq j$, то $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{jk} \det A_{ik} = 0$, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} \det A_{kj} a_{ki} = 0$.*

Доказательство: по предыдущей лемме эти первое из выражений равняется определителю матрицы, в которой i-ая строка равна j-ой строке, и значит равняется нулю. Аналогично со вторым выражением. □

Обозначим через $\widehat{A}$ матрицу $((-1)^{i+j} \det(A_{ji}))$ (обратите внимание на перестановку индексов!). Матрица $\widehat{A}$ называется присоединенной к матрице A.

Теорема 3.5. *Имеем $A \cdot \widehat{A} = \widehat{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$.*

Доказательство: следует из 3.3 и 3.4. □

Следствие 3.6. *Если $\det A$ обратим в K, то $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \widehat{A}$.*

Замечание 3.7. Все эти результаты выполняются также для операторов в произвольном конечно порожденном свободном модуле над любым коммутативным кольцом.

Теорема 3.8. *Пусть A — оператор. Следующие утверждения равносильны:*

(i) A — обратим; (ii) A — инъективен; (iii) A — сюръективен; (iv) $\det A \neq 0$.

Доказательство: заметим, что $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n$, поэтому $(ii) \iff (iii)$. Но с другой стороны, всякий инъективный и сюрьективный оператор биективен, следовательно обратим. Тем самым мы показали, что $(i) \iff (ii) \iff (iii)$. Далее, если A — обратим, то $1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \det(A^{-1})$, следовательно $\det A \neq 0$, а если $\det A \neq 0$, то A обратим по 3.6. Значит $(i) \iff (iv)$. □

Часть 4. Ранг оператора

Определение 4.1. Строчным рангом матрицы A называется максимальное число линейно независимых строк в A, а столбцовым рангом матрицы A — максимальное число линейно независимых столбцов в A.

Лемма 4.2. *Строчный ранг матрицы равен ее столбцовому рангу и равен размеру ее максимального ненулевого минора.*

Доказательство: легко проверить, что при элементарных операциях ни строчный, ни столбцовый ранг матрицы не меняются. Кроме того, миноры матрицы тоже по существу не меняются (либо переставляются, либо умножаются на обратимый элемент). Следовательно, достаточно рассмотреть очевидный случай стандартной матрицы. □

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$.

Лемма 4.3. *Ранг матрицы линейного отображения $A : V \to U$ равен размерности его образа.*

Доказательство: образ отображения порождается столбцами его матрицы. □

Следствие 4.4. *Пусть $A : V \to U$ — линейное отображение. Тогда A — инъективен $\iff r(A) = \dim V$; A — сюръективен $\iff r(A) = \dim U$.*