Часть 1. Характеристика

Пусть K — произвольное поле. Рассмотрим гомоморфизм колец $\kappa_K : \mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto n \cdot 1_K$, где 1_K — единица поля K. Ядро гомоморфизма κ_K — идеал в $\mathbb{Z}$, следовательно имеет вид $\operatorname{Ker} \kappa_K = d\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, где $d \geqslant 0$.

Лемма 1.1. *Если $d \neq 0$, то d — простое число.*

Доказательство: образ гомоморфизма κ_K — подкольцо в поле, следовательно $\operatorname{Im} \kappa_K$ — целостное кольцо, значит $d\mathbb{Z} = \operatorname{Ker} \kappa_K$ — простой идеал, поэтому d — простое число или 0. $\square$

Определение 1.2. Число d называется характеристикой поля K и обозначается $\operatorname{char} K$. Таким образом, либо $\operatorname{char} K = 0$, либо $\operatorname{char} K$ — простое число.

В поле характеристки 0 на всякое ненулевое целое число можно делить, а в поле характеристики $p \neq 0$ на число n можно делить, если и только если n не делится на p.

Лемма 1.3. *Если K — поле, а $I \subset K$ — идеал, то $I = 0$ или $I = K$.*

Доказательство: если $0 \neq x \in I$, то $\forall y \in K\ y = (yx^{-1})x \in I$, значит $I = K$. $\square$

Лемма 1.4. *Всякий гомоморфизм полей является вложением.*

Доказательство: если $f : K \to L$ — гомоморфизм полей, то $f(1) = 1 \Longrightarrow \operatorname{Ker} f \neq K \Longrightarrow \operatorname{Ker} f = 0$. $\square$

Лемма 1.5. *Если K — поле характеристики 0, то $K \supset \mathbb{Q}$, а если K — поле характеристики $p \neq 0$, то $K \supset \mathbb{F}_p$, где $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — поле из p элементов.*

Доказательство: если $\operatorname{char} K = 0$, то отображение $\mathbb{Q} \to K$, $m/n \mapsto \kappa_K(n)^{-1} \cdot \kappa_K(m)$ является гомоморфизмом полей, следовательно $\mathbb{Q} \subset K$. Если же $\operatorname{char} K = p$, то $\operatorname{Im} \kappa_K \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset K$. $\square$

Поля $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{F}_p$ называются простыми полями. Всякое поле содержит единственное простое подполе.

Лемма 1.6. *Если $f : K \to L$ — гомоморфизм полей, то $\operatorname{char} K = \operatorname{char} L$. Более того, f отождествляет простое подполе в K с простым подполем в L.*

Доказательство: ясно, что $\kappa_L = f \circ \kappa_K$, поэтому $\operatorname{Ker} \kappa_K \subset \operatorname{Ker} \kappa_L$. С другой стороны, из леммы 1.4 следует, что $\operatorname{Im} \kappa_K \subset \operatorname{Im} \kappa_L$. Поэтому, $\operatorname{Ker} \kappa_K = \operatorname{Ker} \kappa_L$ и $\operatorname{Im} \kappa_K = \operatorname{Im} \kappa_L$, следовательно характеристика и простые подполя совпадают. $\square$

Часть 2. Расширения полей

Вложение полей $K \subset L$ называется также расширением полей и обозначается L/K. Если L/K — расширение полей, то поле L можно рассматривать как векторное пространство над полем K. Его размерность называется степенью расширения и обозначается $[L : K]$. Расширение L/K называется конечным, если $[L : K] < \infty$. Последовательность расширений полей $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n$ называется также башней полей, а расширения $K_i \subset K_{i+1}$ — этажами башни.

Лемма 2.1. *Степень расширения мультипликативна в башнях: если $F \subset K \subset L$ — расширения полей, то $[L : F] = [L : K][K : F]$.*

Доказательство: выберем базис x_i в K над F и базис y_j в L над K. Покажем, что $x_i y_j$ образуют базис в L над F. Действительно, если $a \in L$, то $a = \sum a_j y_j$, где $a_j \in K$. Далее, имеем $a_j = \sum b_{ij} x_i$, где $b_{ij} \in F$. Подставляя, получаем $a = \sum_j (\sum_i b_{ij} x_i) y_j = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$, следовательно элементы $x_i y_j$ порождают L над F и остается проверить их линейную независимость. Действительно, если $\sum b_{ij} x_i y_j = 0$, где $b_{ij} \in F$, то полагая $a_j = \sum b_{ij} x_i \in K$, получаем $\sum a_j y_j = 0$. Следовательно $\forall j\ a_j = 0$, но тогда $\forall i, j\ b_{ij} = 0$. $\square$

Следствие 2.2. *Башня полей конечна, тогда и только тогда когда конечен каждый ее этаж.*

Определение 2.3. Пусть L/K — расширение полей. Элемент $\alpha \in L$ называется алгебраическим над полем K, если существует многочлен $0 \neq f(x) \in K[x]$, такой что $f(\alpha) = 0$. Расширение L/K называется алгебраическим, если всякий элемент из L алгебраичен над K.

Лемма 2.4. *Всякое конечное расширение полей алгебрачино.*

Доказательство: если $[L : K] = n$ и $\alpha \in L$, то элементы $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n \in L$ не могут быть линейно независимыми над K, поэтому $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in K$, так что $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$. Значит $f(\alpha) = 0$, где $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. $\square$

Пусть L/K — расширение, и $\alpha \in L$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi_\alpha : K[x] \to L$, $f(x) \mapsto f(\alpha)$. Его образ является подкольцом в L и обозначается $K[\alpha]$. Ясно, что $K[\alpha]$ — целостное кольцо. Его поле частных является подполем в L и обозначается $K(\alpha)$. Если α — алгебраичен над K, то гомоморфизм φ_α не является инъективным, следовательно $\operatorname{Ker}\varphi$ — нетривиальный идеал в $K[x]$. Так как $K[x]$ — кольцо главных идеалов, то $\operatorname{Ker}\varphi = p(x)K[x]$, причем $p(x)$ — неприводимый многочлен, так как $K[\alpha]$ — целостное кольцо. Более того, многочлен $p(x)$ можно выбрать так, что его старший коэффициент равен 1. Такой многочлен однозначно определяется элементом α, называется неприводимым многочленом α и обозначается $\operatorname{Irr}_\alpha^K(x)$.

Лемма 2.5. *Если $\alpha \in L$ алгебраичен над K, то $K(\alpha) = K[\alpha]$ и $[K(\alpha) : K] = \deg \operatorname{Irr}_\alpha^K(x)$.*

Доказательство: пусть $0 \neq \beta \in K[\alpha]$. Тогда $\beta = f(\alpha)$ для некоторого $f(x) \in K[x]$. Так как $p(x) = \operatorname{Irr}_\alpha^K(x)$ — неприводим, то НОД$(p(x), f(x)) = 1$, следовательно $p(x)g(x) + f(x)h(x) = 1$ для некоторых $g(x), h(x) \in K[x]$. Подставляя α и учитывая, что $p(\alpha) = 0$, получаем $f(\alpha)h(\alpha) = 1$. Следовательно $\beta = f(\alpha)$ — обратим, значит $K[\alpha]$ — поле, откуда получаем $K(\alpha) = K[\alpha]$. Наконец, если $\deg \operatorname{Irr}_\alpha^K(x) = n$, то легко видеть, что элементы $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ образуют базис $K[\alpha]$ над K, следовательно $[K(\alpha) : K] = n$. $\square$

Пусть L/K расширение полей и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} : K[x_1, \dots, x_n] \to L$, $f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Его образ является подкольцом в L и обозначается $K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Ясно, что $K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ — целостное кольцо. Его поле частных является подполем в L и обозначается $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Легко видеть, что $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ является наименьшим подполем в L, содержащим элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Если $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ для каких-то $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, то говорят, что L — конечно порождено над K.

Лемма 2.6. *Если $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и все α_i алгебраичны над K, то L конечно над K.*

Доказательство: рассмотрим башню полей $K \subset K(\alpha_1) \subset K(\alpha_1, \alpha_2) \subset \dots \subset K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = L$. Ясно, что α_{i+1} алгебраичен над $K(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ (так как $\operatorname{Irr}_{\alpha_{i+1}}^K(x) \in K[x] \subset K(\alpha_1, \dots, \alpha_i)[x]$), поэтому по лемме 2.5 всякий этаж башни конечен, следовательно L над K конечно. $\square$

Теорема 2.7. *Если $F \subset K \subset L$ — расширения полей, то L/F — алгебраично $\iff$ L/K и K/F алгебраичны.*

Доказательство: импликация $\Longrightarrow$ — очевидна. Докажем обратную имплткацию. Пусть $\alpha \in L$. Рассмотрим многочлен $\operatorname{Irr}_\alpha^K(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_i \in K$. Положим $K' = F(a_1, \dots, a_n)$ и рассмотрим башню полей $F \subset K' \subset K'(\alpha)$. Заметим, что $K'(\alpha)$ конечно над K' по лемме 2.5. С другой стороны, $a_i \in K$, следовательно a_i алгебраичны над F, следовательно, по лемме 2.6 поле K' конечно над F. Значит $K'(\alpha)$ конечно над F, следовательно α алгебраичен над F. $\square$

Следствие 2.8. *Если L/K — расширение полей, то $L_{\mathrm{alg}} := \{ \alpha \in L \mid \alpha$ алгебраичен над $K \}$ — подполе в L.*

Доказательство: если $\alpha, \beta \in L$ — алгебраичны над K, то поле $K(\alpha, \beta)$ конечно над K, но $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ и α^{-1} лежат в $K(\alpha, \beta)$ — следовательно алгебраичны над K. $\square$

Часть 3. Алгебраическое замыкание

Лемма 3.1. *Пусть $f(x) \in K[x]$. Существует конечное расширение L/K, в котором $f(x)$ имеет корень.*

Доказательство: пусть $p(x) \in K[x]$ — неприводимый делитель многочлена $f(x)$. Возьмем $L = K[x]/p(x)K[x]$ и обозначим через α образ x в L. Тогда ясно, что $p(\alpha) = 0$, следовательно $f(\alpha) = 0$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $f_1(x), \dots, f_n(x) \in K[x]$. Существует конечное расширение L/K, в котором каждый из многочленов $f_i(x)$ имеет корень.*

Доказательство: пусть $K_0 = K$ и K_{i+1}/K_i — конечное расширение, в котором $f_{i+1}(x)$ имеет корень. Тогда $L = K_n$ — искомое расширение. □

Теорема 3.3. *Всякое поле K можно вложить в алгебраически замкнутое поле.*

Доказательство: построим сначала расширение K_1/K, в котором любой многочлен из $K[x]$ будет иметь корень. Для этого сопоставим всякому многочлену $f(x) \in K[x]$ переменную x_f и рассмотрим кольцо многочленов $A := K[x_f]_{f \in K[x]}$ от всех этих переменных. Пусть I — идеал в кольце A, порожденный всеми многочленами $f(x_f)$. Покажем, что $I \neq A$. Действительно, если $I = A$, то существуют элементы $g_1, \dots, g_n \in A$ и многочлены $f_1, \dots, f_n \in K[x]$, такие что

$$g_1 f_1(X_{f_1}) + \dots + g_n f_n(X_{f_n}) = 1. \qquad (*)$$

В каждый из многочленов $g_1, \dots, g_n$ входит лишь конечное число переменных, поэтому $\exists N \in \mathbb{Z}$, такое что $g_1, \dots, g_n$ лежат в подкольце $A' = K[X_{f_1}, \dots, X_{f_n}, \dots, X_{f_N}] \subset A$ и соотношение $(*)$ можно рассматривать как соотношение в кольце A'. Выберем теперь конечное расширение L/K, в котором каждый из многочленов $f_i(x)$ $(i = 1, \dots, n)$ имеет корень (обозначим его α_i). Положим, далее $\alpha_i = 0$ для $n < i \leqslant N$ и рассмотрим гомоморфизм $\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} : A' \to L$. Применяя его к равенству $(*)$ получаем $0 = 1$ — противоречие.

Таким образом $I \neq A$. Пусть $\mathfrak{m} \subset A$ — максимальный идеал, содержащий I. Тогда $K_1 = A/\mathfrak{m}$ — поле, причем $K \subset K_1$ и всякий многочлен $f(x) \in K[x]$ имеет корень в K_1. Повторяя описанную конструкцию получаем бесконечную башню полей $K \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$, в которой всякий многочлен $f(x) \in K_i[x]$ имеет корень в K_{i+1}. Рассмотрим теперь $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Покажем, что L — поле. Если $x, y \in L$, то $x, y \in K_i$ для некоторого i, значит определены $x + y, xy \in K_i$. Ясно, что заданные таким образом операции в L корректно определены. Более того, ясно, что все необходимые свойства выполняются (всякий раз их достаточно проверять в одном из полей K_i). Значит L — действительно поле. Наконец, если $f(x) \in L[x]$, то так как f имеет лишь конечное число коэффициентов, то $f(x) \in K_i[x]$ для некоторого i, значит $f(x)$ имеет корень в K_{i+1}, а следовательно и в L. □

Следствие 3.4. *Для любого поля K существует алгебраически замкнутое поле $\overline{K}$, являющееся алгебраическим расширением поля K.*

Доказательство: вложим K в алгебраически замкнутое поле L и пусть $\overline{K}$ — множество всех $\alpha \in L$, алгебраических над K. По лемме 2.8 $\overline{K}$ — подполе в L. Покажем, что $\overline{K}$ — алгебраически замкнуто. Пусть $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \overline{K}[x]$. Тогда многочлен $f(x)$ имеет корень α в L. Рассмотрим башню полей $K \subset K(a_1, \dots, a_n) \subset K(a_1, \dots, a_n)(\alpha)$. Первый этаж башни алгебраичен, так как a_i алгебраичны над K, а второй алгебраичен по построению. Значит $K(a_1, \dots, a_n)(\alpha)$ алгебраично над K, следовательно $\alpha \in \overline{K}$. □

Поле $\overline{K}$ называется алгебраическим замыканием поля K.

Замечание 3.5. Позднее мы покажем, что любые два алгебраических замыкания поля K изоморфны.