Задачи по алгебре к 10 сентября 2002

1. Докажите изоморфизмы групп: a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mu_n$; b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mu = \bigcup_n \mu_n \subset \mathbb{C}$; c) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbf{S}^1$; d) $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*$.

2. Докажите изоморфизмы групп: a) $\mathbb{R}^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_{>0}$; b) $\mathbb{C}^* \cong \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}_{>0}$; c) $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

d) $\mathrm{Map}(\{1, 2\}, G) \cong G \times G$.

3. Докажите изоморфизм колец $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, если n и m взаимно просты.

4. Найдите группы обратимых элементов в кольцах (в пунктах a)–c) K — произвольное поле):

a) $K[x]$; b) $K[[x]]$; c) $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$; d) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p — простое; e*) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n — любое.

5. Опишите все подгруппы в следующих группах: a) $\mathbb{Z}$; b) μ_n; c) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; d) $\mathfrak{S}_3$; e) $\mathfrak{S}_4$.

6. Найдите группы автоморфизм следующих групп: a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; c) $\mathfrak{S}_3$; d) $\mathfrak{S}_4$.

7. Найдите группы автоморфизмов колец: a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{Z}[x]$; d) $\mathbb{Z}[[x]]$; e) $\mathbb{Q}[i]$.