**Задачи по алгебре к 12 ноября 2002**

1. Докажите, что a) поле $\mathbb{F}_q$ вкладывается в поле $\mathbb{F}_r \iff r = q^n$;
b) $\forall n$ поле $\mathbb{F}_q$ имеет единственное расширение степени $n$; c) $\overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$.

2. Опишите все автоморфизмы a) поля $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$; b) поля $\mathbb{F}_{q^n}$ над $\mathbb{F}_q$;

3. Докажите, что a) если $F \subset K \subset L$ и $L/F$ нормально, то $L/K$ нормально;
b) если $K \subset L$ и $[L : K] = 2$, то $L/K$ нормально; c) $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ не нормально.
d) Приведите пример башни полей $F \subset K \subset L$, в которой $K/F$ и $L/K$ нормальны, но $L/F$ не нормально.

4. Найдите $[L : \mathbb{Q}]$, где $L$ — поле разложения многочлена a) $x^4 - 2$; b) $x^p - a$, $p$ — простое.

5. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}$ — образующая группы $\mu_n(\mathbb{C})$.
a) Найдите $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$. b) Покажите, что $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ — нормально. c) Найдите $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))$.

6. Пусть $f(x) = x^p - x - a$, $a \in K$, $\operatorname{char} K = p$. Докажите, что a) $f(x+1) = f(x)$; b) $f(x)$ либо неприводим, либо раскладывается на линейные множители; c) если $L = K[x]/f(x)K[x]$, то $\mathrm{Aut}(L/K) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

7. Пусть $L = K(\alpha)$, $[L : K] = n$. Покажите, что
a) если $K \subset F \subset L$, $\mathrm{Irr}_\alpha^F = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$, то $F = K(a_1, \ldots, a_k)$; b) $|\{ F \mid K \subset F \subset L \}| \leqslant 2^n$.

8. a) Если $K \subset L$, $\alpha, \beta \in L$ и $K(\alpha + c_1\beta) = K(\alpha + c_2\beta)$, $c_1, c_2 \in K$, то $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + c_1\beta)$.
b) Если $r = q^n$, то $\exists \alpha$ т.ч. $\mathbb{F}_r = \mathbb{F}_q(\alpha)$. c) Если $[L : K] < \infty$, и $|\{ F \mid K \subset F \subset L \}| < \infty$, то $\exists \alpha$ т.ч. $L = K(\alpha)$.