Задачи по алгебре к 19 ноября 2002

1. Пусть $f(x), g(x) \in K[x]$ и $h(x) = \text{НОД}_{\overline{K}[x]}(f(x), g(x))$. Покажите, что $h(x) \in K[x]$.

2. Покажите, что если L/K одновременно сепарабельно и чисто несепарабельно, то $L = K$.

3. Покажите, что если L/K нормально, то L^{sep}/K нормально.

4. Докажите, что любое конечное поле совершенно.

5. Докажите, что a) расширение $\mathbb{F}_p(x, y)/\mathbb{F}_p(x^p, y^p)$ чисто несепарабельно; b) $[\mathbb{F}_p(x, y) : \mathbb{F}_p(x^p, y^p)] = p^2$;
c) существует бесконечное число полей K, таких что $\mathbb{F}_p(x^p, y^p) \subset K \subset \mathbb{F}_p(x, y)$.

6. Пусть K — бесконечное поле, $K(\alpha, \beta)/K$ — сепарабельно, $[K(\alpha, \beta) : K] = n$ и $G = \text{Aut}(K(\alpha, \beta)/K)$.
Докажите, что a) $\exists c \in K$ т.ч. $|G(\alpha + c\beta)| = n$, где $G(\alpha + c\beta)$ — орбита $\alpha + c\beta$ относительно группы G;
b) если $|G(\alpha + c\beta)| = n$, то $[K(\alpha + c\beta) : K]_s \geqslant n$; c) если $|G(\alpha + c\beta)| = n$, то $K(\alpha + c\beta) = K(\alpha, \beta)$.
d) Если L/K — конечно и сепарабельно, то $L = K(\alpha)$.