Задачи по алгебре к 26 ноября 2002

1. Найдите группу $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ и опишите все промежуточные подполя.

2. Найдите группу Галуа многочленов a) x^2+ax+b; b) x^3+ax+b; c) x^p-a.

3. Докажите, что группа Галуа многочлена степени n является подгруппой группы $\mathfrak{S}_n$.

4. Докажите, что группа Галуа многочлена $p(x)\in K[x]$ степени n является подгруппой группы $\mathrm{A}_n \iff \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)\in K$, где α_i — корни $p(x)$ в $\overline{K}$.

5. Пусть $\operatorname{char} K=p>0$, $p(x)=x^p-x-a\in K[x]$ — неприводим, θ — корень $p(x)$ в $\overline{K}$ и $L=K(\theta)$.
a) Докажите, что L/K — расширение Галуа. b) Найдите группу $\mathrm{Gal}(L/K)$ и опишите ее действие.
c) Докажите, что любое расширение Галуа степени p имеет такой вид.