Задачи по алгебре к 17 сентября 2002

1. a) Докажите, что если $H \subset G$ — подгруппа, то множество G/H находится в биекции с множеством $H\backslash G$.
b) Докажите, что если $K \subset H \subset G$— подгруппы, то $(G:K) = (G:H)(H:K)$.

2. Постройте канонические гомоморфизмы групп:
a) если $K \subset H \subset G$, $K, H \triangleleft G$, то $G/H \cong (G/K)/(H/K)$; b) если $K, H \subset G$ и $H \subset N_K$, то $H/(H \cap K) \cong HK/K$;
c) если $f : G \to G'$ и $N \subset \operatorname{Ker} f$, $N \triangleleft G$, то $\bar{f} : G/N \to G'$; d) если $f : G \to G'$ и $H' \triangleleft G'$, то $G/f^{-1}(H') \to G'/H'$.

3. Докажите изоморфизмы групп: a) $\mathbf{S}^1/\mu_n \cong \mathbf{S}^1$; b) $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \cong \mathbf{S}^1/\mu$; c) $(G_1 \times G_2)/G_1 \cong G_2$;

4. Пусть H — подгруппа в G и $(G:H) = n$. a) Докажите, что группа $G/(\bigcap_{x \in G} xHx^{-1})$ изоморфна подгруппе группы $\mathfrak{S}_n$. b) Если $(G:1) = N$, то G изоморфна подгруппе группы $\mathfrak{S}_N$. c) Если $n = 2$, то $H \triangleleft G$. d) Если $(G:1) = N$, а n — минимальный простой делитель числа N, то $H \triangleleft G$.