Задачи по алгебре к 24 сентября 2002

1. Найдите орбиты и стабилизаторы в примерах a) 1.2.1; b) 1.2.2; c) 1.2.3; d) 1.2.5; e) 1.2.6; f) 1.2.7. Являются ли эти действия транзитивными? Свободными? Точными?

2. Докажите, что a) если $|G| = p^n$, p — простое, то $|Z_G| = p^k$, $k > 0$; b) $Z_{\mathfrak{S}_n} = \{ e \}$ при $n \geqslant 3$.

3. a) Докажите, что группа симметрий тетраэдра изоморфна $\mathfrak{S}_4$. b) Постройте эпиморфизм $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ и найдите его ядро (группа Клейна). c) Постройте эпиморфизм из группы симметрий куба в $\mathfrak{S}_4$ и найдите его ядро. d*) Постройте эпиморфизм из группы симметрий додекаэдра в A_5 и найдите его ядро.

4. Докажите, что a) $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z_G$; b) $\mathrm{Inn}(G) \triangleleft \mathrm{Aut}(G)$.

5. Пусть $(k_1, \ldots, k_n)$ — разбиение, соответствующее перестановке σ. Найдите a) порядок σ; b) знак σ; c) порядок централизатора σ; d) обратную перестановку.

6. Докажите, что любая перестановка σ раскладывается в произведение a) транспозиций $(12), \ldots, (n-1, n)$; b) перестановок (12) и $(123\ldots n)$; c) циклов длины 3, если σ — четна.

7. a) Покажите, что всякая нормальная подгруппа является объединением классов сопряженности.
b*) Докажите, что при $n \geqslant 5$ знакопеременная группа A_n не имеет нетривиальных нормальных подгрупп.