Задачи по алгебре к 1 октября 2002

1. Докажите изоморфизмы колец: a) если K — поле и $f(x)$ — многочлен степени 1, то $K[x]/f(x)K[x] \cong K$;
b) если $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ — многочлен степени 2, не имеющий вещественных корней, то $\mathbb{R}[x]/f(x)\mathbb{R}[x] \cong \mathbb{C}$;
c) если A — кольцо верхнетреугольных матриц размера $n \times n$ с коэффициентами в кольце R, а I — идеал строго верхнетреугольных матриц, то $A/I \cong R \times R \times \cdots \times R$ (n раз).
d) $\mathrm{End}_A(A^{\oplus n}) \cong \mathrm{Mat}_{n\times n}(A)$; $\mathrm{Hom}_A(A^{\oplus m}, A^{\oplus n}) \cong \mathrm{Mat}_{n\times m}(A)$;

2. Пусть $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Докажите, что $K[x]/(x^2+x+1)K[x]$ — поле.

3. Докажите изоморфизмы A-модулей: a) $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$; b) $\mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, N)$; c) $\mathrm{Hom}_A(M, N_1 \oplus N_2) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$; d) $\mathrm{Map}(S, M) \cong \bigoplus_{s\in S} M$;
e) $\mathrm{Mat}_{n\times m}(B) \cong \mathrm{Mat}_{n\times 1}(B)^{\oplus m}$, если $A = \mathrm{Mat}_{n\times n}(B)$.

4. Какие модули являются свободными? Конечно порожденными? a) $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$; b) $A = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{R}$; c) $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C}$; d) $A = \mathrm{Mat}_{n\times n}(A)$, $M = \mathrm{Mat}_{n\times m}(A)$.

5. Найдите a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$; b) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$; c) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$;

6. Пусть $N_i \subset M$ — подмодули. Покажите, что a) $\sum N_i := \{\sum n_i\}$, где почти все слагаемые равны нулю; b) $\bigcap N_i$ — подмодули в M.