Задачи по алгебре к 8 октября 2002

1. Постройте базисы над полем K в кольцах a) матриц $n \times n$, b) верхнетреугольных матриц, c) многочленов с коэффициентами в K и запишите законы умножения в этих базисах.

2. Постройте канонические изоморфизмы a) $U + W \cong (U \oplus W)/(U \cap W)$, если $U, W \subset V$;
b) $(U + W)/U \cong W/(U \cap W)$, если $U, W \subset V$; c) $V/(U + W) \cong (V/U)/(W/(U \cap W))$, если $U, W \subset V$;
d) $(V/W)/(U/W) \cong V/U$, если $W \subset U \subset V$;

3. Постройте неканонический изоморфизм $V \cong U \oplus V/U$, если $U \subset V$.

4. Докажите, что a) $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$; b) $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$;
c) $\dim V = \dim U + \dim V/U$, если $U \subset V$; d) $\dim V - \dim U = \dim V/(\operatorname{Im} f) - \dim \operatorname{Ker} f$, если $f : U \to V$.

5. Покажите, что целочисленными элементарными преобразованиями строк и столбцов любую целочисленную матрицу можно привести к диагональному виду с числами $d_1, \ldots, d_r$ на диагонали, так что $d_1 | d_2 | \ldots | d_r$.

6. Докажите, что a) любая подгруппа в свободной конечнопорожденной абелевой группе является свободной конечнопорожденной абелевой группой; b) любая конечнопорожденная абелева группа изоморфна группе $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$, где $d_1 | d_2 | \ldots | d_r$; c) если $\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \cong \oplus_{i=1}^s \mathbb{Z}/c_i\mathbb{Z}$, где $d_1 | d_2 | \ldots | d_r$ и $c_1 | c_2 | \ldots | c_s$, то $r = s$ и $\forall i \; d_i = \pm c_i$.