Задачи по алгебре к 15 октября 2002

1. Найдите след, определитель, характеристический многочлен и ранг матриц:

a) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$

2. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Докажите, что если $\forall X \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ имеем $\mathrm{tr}(AX) = 0$, то $A = 0$.

3. Пусть A — матрица $n \times n$. Покажите, что
a) если $r(A) = n$, то $r(\widehat{A}) = n$; b) если $r(A) = n-1$, то $r(\widehat{A}) = 1$; c) если $r(A) \leqslant n-2$, то $\widehat{A} = 0$.

4. Покажите, что a) $r(AB) \leqslant r(A)$; b) $r(AB) \leqslant r(B)$; c) $r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$.

5. Покажите, что всякая матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ ранга r представляется в виде $A = B \cdot C$, где $B \in \mathrm{Mat}_{m\times r}(K)$ и $C \in \mathrm{Mat}_{r\times n}(K)$. Насколько однозначно такое представление?

6. Системой линейных уравнений называется изображенная справа система, записываемая кратко в виде $Ax = b$, где $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $b \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K)$ и x — столбец неизвестных. Докажите, что

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a) множество решений системы $Ax = 0$ является векторным пространством размерности $n - r(A)$.
b) либо множество решений системы $Ax = b$ пусто, либо на нем свободно и транзитивно действует множество решений системы $Ax = 0$.
c) множество решений системы $Ax = b$ непусто $\iff r(A) = r(A|b)$.

7. Пусть R — коммутативное кольцо, M — R-модуль и $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$. Докажите, что если $\forall x \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(M)$ имеем $Ax = 0$, то $(\det A)M = 0$.