Задачи по алгебре к 22 октября 2002

1. Найдите ЖНФ операторов a) d/dt; b) $(d/dt)^k$ в $\{\, f(t) \in K[t] \mid \deg f \leqslant n \,\}$; c) t в $\mathbb{C}[t]/p(t)\mathbb{C}[t]$.

2. Пусть $D = J_n(0) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Покажите, что
a) $(tE+D)^k = \sum_p \frac{k!}{(k-p)!} t^{k-p} \frac{D^p}{p!}$; b) $f(tE+D) = \sum_p f^{(p)}(t) \frac{D^p}{p!}$, где $f(t) \in K[t]$.

3. Пусть дана матрица A в ЖНФ. Найдите a) $f(A)$, где $f \in K[t]$; b) A^{-1}; c) $Z_A(\mathrm{Mat}_{n\times n}(K))$.

4. Пусть A оператор в n-мерном векторном пространстве над полем K. Докажите эквивалентность условий 1) $\chi_A(t) = t^n$; 2) $m_A(t) = t^m$; 3) A — нильпотентен; 4) $\forall k \geqslant 1$ $\operatorname{tr} A^k = 0$ (если $1/k \in K$ при $1 \leqslant k \leqslant n$).

5. Пусть A и B — нильпотентны и $AB = BA$. Докажите, что a) $A+B$; b) AB — нильпотентны.

6. Пусть K — алгебраически замкнуто, $A \in \mathrm{End}_K(V)$, V_λ — корневое подпространство A. Докажите, что a) если $AB = BA$, то $B(V_\lambda) \subset V_\lambda$; b) если $A = A_{ss} + A_n$ — разложение Жордана, то $A_{ss}(V_\lambda) \subset V_\lambda$, $A_n(V_\lambda) \subset V_\lambda$; c) если A нильпотентен, то $A_{ss} = 0$; d) разложение Жордана единственно.

7. Пусть $A, A_1, \ldots, A_n$ — проекторы в V. Докажите, что a) $\mathrm{Id} - A$ — проектор, коммутирующий с A; b) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - A)$, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - A)$; c) $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$; d) если $\sum A_i = \mathrm{Id}$ и $A_i A_j = A_j A_i$, то $V = \oplus \operatorname{Im} A_i$. e) если $V = \oplus V_i$ и $B_i = \mathrm{Id}_{V_i}$, то B_i — проекторы, $B_i B_j = B_j B_i$ и $\sum B_i = \mathrm{Id}$.

8. Опишите орбиты и стабилизаторы для действия a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ на $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $(g, A) \mapsto gAg^{-1}$;
b) $\mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_m(K)$ на $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$, $(g_1, g_2, A) \mapsto g_1 A g_2^{-1}$.