Задачи по алгебре к 29 октября 2002

1. Пусть $\mathfrak{a}_i \subset A$ — идеалы. Докажите, что a) $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ — идеал; b) $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 := \{ \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid x_i \in \mathfrak{a}_1,\ y_i \in \mathfrak{a}_2 \}$ — идеал; c) $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ — идеал; d) $\mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)\mathfrak{a}_3$; e) $\mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$.

2. Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм колец. Докажите, что прообраз $f^{-1}(\mathfrak{p}) \subset A$ простого идеала $\mathfrak{p} \subset B$ является простым идеалом. Покажите, что прообраз максимального идеала может не быть максимальным.

3. Пусть $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subset A$ — идеалы, такие что $\forall i \neq j$ имеем $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$. Докажите, что
a) $\forall x_1, \dots, x_n \in A\ \exists x \in A$ такой что $\forall i\ x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{a}_i}$; b) $\prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i \cong A/\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$.

4. Пусть A — целостное кольцо. a) Докажите, что кольца $A[x]$ и $A[[x]]$ — целостные.
b) Опишите их поля частных.

5. Докажите, что кольцо $K[[x]]$ a) нётерово; b) факториально. c) Перечислите в нем простые идеалы.

6. Докажите, что в факториальном кольце A элемент p неприводим $\iff$ идеал $pA \subset A$ — прост.

7. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[i] = \{ a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$ a) целостное; b) факториальное.

8. Перечислите в кольце $\mathbb{Z}[i]$ все a) единицы; b*) неприводимые элементы;

9. Пусть A — факториальное кольцо с полем частных K, а $p \in A$ — неприводимый элемент. Докажите, что a) существует единственное отображение $\operatorname{ord}_p : A \to \mathbb{Z} \cup \infty$, такое что $\operatorname{ord}_p(p) = 1$, $\operatorname{ord}_p(0) = \infty$, $\operatorname{ord}_p(a) = 0 \iff$ НОД$(a, p) = 1$ и $\operatorname{ord}_p(ab) = \operatorname{ord}_p(a) + \operatorname{ord}_p(b)$. b) Отображение ord_p однозначно продолжается на поле K с сохранением свойств. c) Функция $\rho(x, y) = C^{-\operatorname{ord}_p(x-y)}$, где $C \in \mathbb{R}$, $C > 1$ является метрикой на поле K.
d) $A_p := \{ x \in K \mid \rho(x, 0) \leqslant 1 \}$ — подкольцо в K. e) $\mathfrak{m}_p := \{ x \in K \mid \rho(x, 0) < 1 \}$ — максимальный идеал в A_p.