Программа экзамена по алгебре

1 курс, осень 2002 г.

На зачете каждому студенту будет предлагаться по одному вопросу из каждой темы (группы, кольца, модули, линейная алгебра, поля). После каждого вопроса указано примерное предполагаемое содержание ответа (темы, изучавшиеся на лекциях (номер лекции указан римскими цифрами), и задачи, изучавшиеся на семинарах (указана дата выдачи листка с задачами)).

- Группы.
  1. Определение моноида и группы, гомоморфизмы. — (I) 1.1–1.10, 3.1–3.5.
  2. Подгруппы, классы смежности, теорема об индексе. — (II) 1.1, 1.5, 1.6, 1.8, 1.9, (17с) 1.
  3. Нормальные подгруппы, факторгруппа. — (II) 2.3–2.9, (17с) 2, (24с) 7a.
  4. Ядро, образ, теорема о гомоморфизме. — (II) 2.1, 2.2, 2.10, 2.11.
  5. Действия групп на множествах, сопряжения, сдвиги. — (III) 1.1–1.6, (17с) 4, (24с) 4.
  6. Орбиты и стабилизаторы, формула классов. — (III) 2.2–2.9, (24с) 2a.
  7. Группа перестановок, независимые циклы. — (III) 3.1, 3.2, (24с) 2b, 3abc, 5.
  8. Транспозиции, четность, знак перестановки. — (III) 3.3–3.5, (24с) 6.
  9. Циклические группы. — (I) 1.4, 1.7, (10с) 3, 5a, 6ab.
- Кольца.
  1. Определение кольца, гомоморфизмы колец. — (I) 2.1, 2.4, 2.5, 3.1–3.5.
  2. Подкольца, идеалы, факторкольцо. — (IV) 1.1–1.8, 1.13.
  3. Ядро, образ, теорема о гомоморфизме. — (IV) 1.7–1.9, 1.14, 1.15.
- Коммутативные кольца.
  1. Делители нуля, целостность, поле частных. — (VIII) 1.1, 1.2, 1.6, 1.13, (29о) 1, 3, 4, (10с) 4abde.
  2. Простые и максимальные идеалы. — (VIII) 1.3–1.12, 1.14, (29о) 2.
  3. Кольца главных идеалов, деление с остатком. — (VIII) 2.1–2.4.
  4. Нетеровость. — (VIII) 2.8, 2.9, (29о) 5a.
  5. Делимость, наибольший общий делитель, неприводимость. — (VIII) 2.5–2.7, 3.1, 3.2, 3.5.
  6. Разложение на множители, факториальность кольца главных идеалов. — (VIII) 3.1–3.9, (29о) 6.
  7. Кольцо многочленов.
  8. Кольцо формальных степенных рядов.
  9. Гауссовы числа.
- Модули.
  1. Модули над кольцом, образующие, линейная зависимость и базисы. — (IV) 2.1–2.8.
  2. Векторные пространства, существование базиса. — (V) 1.1–1.4.
  3. Подмодуль, фактормодуль, теорема о гомоморфизме. — (V) 3.1–3.7.
  4. Элементарные преобразования матриц. — (V) 2.1–2.7.
  5. Размерность, классификация векторных пространств. — (V) 2.8–2.10, (8о) 4.
  6. Классификация конечно порожденных абелевых групп. — (8о) 5, 6.
  7. Прямые суммы. — (V) 1.5–1.7, 2.11, (1о) 3bc, (8о) 2.
- Линейная алгебра.
  1. Линейные отображения и матрицы, изменение матрицы при замене базиса. — (VI) 1.1–1.7.
  2. След, определитель, характеристический многочлен. — (VI) 2.1–2.9, (15о) 1b, 2.
  3. Присоединенная матрица, формула обращения матрицы. — (VI) 3.1–3.8.
  4. Ранг оператора, матрицы, вычисление ранга. — (VI) 4.1–4.4, (15о) 4, 5.
  5. Собственные векторы, корневые подпространства. — (VII) 1.1–1.6.
  6. Теорема о жордановой нормальной форме. — (VII) 2.1–2.6.
  7. Вычисления в жордановом базисе. — (VII) 2.5, (22о) 2, 3.
  8. Полупростые и нильпотентные операторы, жорданово разложение. — (VII) 2.7, 2.8, (22о) 4, 5, 6.
  9. Теорема Гамильтона-Кэли, минимальный многочлен. — (VII) 3.1–3.7.
  10. Системы линейных уравнений. — (15о) 6.

- Поля.
  1. Характеристика, простые поля, мультипликативная группа поля. — (IX) 1.1–1.6, (5н) 1.
  2. Расширения полей, степень, конечные расширения, башни. — (IX) 2.1–2.2, (5н) 2.
  3. Алгебраичекие расширения, многочлен $\mathrm{Irr}_\alpha^K(x)$. — (IX) 2.3–2.5.
  4. Конечно порожденные алгебраические расширения. — (IX) 2.6–2.8.
  5. Существование алгебраического замыкания. — (IX) 3.1–3.4, (5н) 7.
  6. Продолжения гомоморфизмов, единственность алгебраического замыкания. — (X) 1.1–1.5.
  7. Поле разложения. — (X) 2.1–2.3, (12н) 4b.
  8. Нормальные расширения. — (X) 3.1–3.3, (12н) 3, 5.
  9. Конечные поля и их автоморфизмы. — (X) 4.1–4.4, 4.6–4.9, (12н) 1, 2b.
  10. Сепарабельная степень. — (XI) 1.1–1.5.
  11. Сепарабельные расширения. — (XI) 2.1–2.11, (X) 4.5.
  12. Чисто несепарабельные расширения. — (XI) 3.1–3.7.
  13. Сепарабельное замыкание, совершенные поля. — (XI) 4.1–4.6, (19н) 3, 4.
  14. Теорема о примитивном элементе. — (XII) 2.1–2.5.
  15. Теорема Галуа. — (XII) 1.1–1.6, 2.5, 3.1, 3.2, 3.8, 3.9.
  16. Свойства изоморфизма теоремы Галуа. — (XII) 3.3–3.7.
  17. Группа Галуа многочлена. — (26н) 2, 3, 4, 5.