1 декабря 2002

Экзамен по алгебре.

1. Пусть $\rho : Z_3 \to GL(2,R)$- вещественное представление циклической группы порядка 3, при котором образующая переходит в линейный оператор $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите положительно определенную симметрическую билинейную функцию, инвариантную относительно группы $\rho(Z_3)$.

2. Пусть T - группа вещественных треугольных матриц 3×3 с единицами на главной диагонали. Докажите, что отображение $exp : LieT \to T$ является сюръективным. Является ли exp в этом случае гомеоморфизмом?

3. Пусть χ- характер точного неприводимого комплексного n-мерного представления конечной группы G. Докажите, что если $|\chi(g) = n|$, то элемент g лежит в центре группы G.

4. Пусть H - абелева подгруппа группы G. Тогда размерность любого комплексного неприводимого представления группы G не превосходит индекса $[G : H]$.

5. Пусть $Lie\ G$ - алгебра Ли компактной линейной группы G. Докажите, что для любого идеала $I \triangleleft LieG$ существует дополнительный идеал I', т.е. $LieG = I \oplus I'$.

6. В пространстве непрерывных комплекснозначных функций на сфере S^2 рассмотрим подпространство U, которое

а) конечномерно

б) $SO(3)$-инвариантно (Относительно действия $f^g(x) = f(g^{-1}x)$ в пространстве функций на сфере)

Докажите, что любой максимальный тор $T \subset SO(3)$ имеет неподвижный вектор при действии в U.

7. Пусть A - циклическая подгруппа группы S_n, порожденная циклом (1,2,.. . ,n) и (ρ - представление группы S_n, индуцированное примитивным характером X группы A: $\chi((1,2,\ldots,n)) = e^{2\pi i/n}$. Требуется:

а) вычислить характер $\chi_\rho(.)$ представления ρ в случае $n = 6$.

б) доказать, что $\chi_\rho(\sigma)$ - целое число при любом n и $\sigma \in S_n$.