Листок 1. Представления

1) Пусть G конечная группа, K-поле. Доказать,что групповая алгебра KG тогда и только тогда полупроста,когда $char\, K = 0$ или характеристика не делит порядок группы (рассмотрите элемент $\sum_{g \in G} g$).

2) Разложите групповую алгебру циклической группы третьего порядка над полем $GF(2)$ в прямую сумму простых подалгебр.

3) Пусть $C_i, i = 1, ..., s$, классы сопряженных элементов в группе G. Положим $\gamma_i = \sum_{g \in C_i} g$. Тогда γ_i образуют базис центра групповой алгебры.

4) (Лемма Шура.) Пусть ρ_1 и ρ_2 неприводимые комплексные представления в пространствах V_1 и V_2 соответственно. Если линейное преобразование T таково, что $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$, то:

   а) $T = 0$, если ρ_1 неэквивалентно ρ_2

   б) $T = \lambda E$, если $\rho_1 = \rho_2$,$V_1 = V_2$.

5) Найти матрицу характеров группы A_4.

6) Найти матрицу характеров группы симметрий правильного n-угольника.

7) Найти матрицу характеров группы кватернионов$(\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k)$.

8) Если группа действует на конечном множестве X, то возникает естественное преставление ρ_X группы в пространстве комплекснозначных функций на X. Разложить это представление на неприводимые в следующих случаях:

   а) группа собственных вращений куба действует на множестве его вершин

   б) группа додекаэдра действует на множестве его граней.

9) Восстанавливается ли группа по матрице характеров?

10) SOS!!! На сайт НМУ пришел вызов:

    Пусть A — ассоциативное кольцо, в котором $a^3 = a$ для любого $a \in A$. Требуется доказать, что кольцо A коммутативно, не используя структурную теорию колец.

    Да здравствуют малознающие олимпиадные бойцы!

    Даёшь элементарное решение!

    Отобъём охоту задавать нам подобные вопросы!