Задача 0.

1. Придумать какое-нибудь неприводимое представление конечной абелевой группы.

2. Придумать какое-нибудь неприводимое представление конечной абелевой группы размерности большей чем 1.

3. Верно ли, что любое представление конечной абелевой группы над алгебраически замкнутым полем размерности больше чем 1 разложимо?

4. Верно ли, что любое комплексное представление абелевой группы размерности > 1 разложимо?

Задача 1. Описать характеры неприводимых комплексных представлений абелевой группы.

Задача 2. Пусть Φ и Ψ — неприводимые комплексные представления циклической группы $< x|x^n = e >$ порядка n. Докажите, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(x^k)\overline{\Psi(x^k)} = \delta_{\Phi,\Psi},$$

где $\delta_{\Phi,\Psi}$ равно единице или нулю в зависимости от того изоморфны представления Φ и Ψ или нет.

Задача 3. *Следствие леммы Шура.* Пусть ϱ_1 и ϱ_2 — два неприводимых $\mathbb{C}$-представления конечной группы G в пространствах V_1 и V_2 и $T : V_1 \to V_2$ — произвольное линейное отображение. Тогда "усреднённое" отображение

$$\widetilde{T} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varrho_2(g)T\varrho_1(g)^{-1}$$

обладает следующими свойствами:

(1) если $\varrho_1 \not\approx \varrho_2$, то $\widetilde{T} = 0$;

(2) если $V_1 = V_2 = V$ и $\varrho_1 = \varrho_2$, то $\widetilde{T} = \lambda E$, $\lambda = \frac{\operatorname{tr} T}{\dim V}$.

Задача 4. (Еще одно следствие.) Пусть Φ и Ψ — неприводимые представления конечной группы G в комплексных пространствах V и W. Тогда:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{jj_0}(g)\phi_{i_0i}(g^{-1}) = \delta_{\Phi,\Psi}\frac{\delta_{ji}\delta_{j_0i_0}}{\dim V}.$$

Задача 5. Характеры эквивалентных представлений совпадают.

Задача 6. Пусть χ_Φ — характер комплексного представления (Φ, V) группы G. Тогда:

(1) $\chi_\Phi(e) = \dim V$;

(2) $\chi_\Phi(hgh^{-1}) = \chi_\Phi(g)\ \forall g, h \in G$ (постоянство на классах сопряженных элементов);

(3) Если $g \in G$ — элемент конечного порядка, то числа $\chi_\Phi(g)$ и $\chi_\Phi(g^{-1})$ $\mathbb{C}$-сопряжены ($\chi_\Phi(g^{-1}) = \overline{\chi_\Phi(g)}$);

(4) прямой сумме $\Phi = \Phi' + \Phi''$ представлений отвечает характер $\chi_\Phi = \chi_{\Phi'} + \chi_{\Phi''}$.

Определение 1. Пусть G — конечная группа. В $\mathbb{C}G = \mathbb{C}^G$ введём эрмитово произведение:

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f_1(g)\overline{f_2(g)}.$$

Задача 7. *Первое соотношение ортогональности.* Пусть Φ и Ψ — неприводимые $\mathbb{C}$-представления конечной группы G. Тогда $\langle\chi_\Phi, \chi_\Psi\rangle = \delta_{\Phi,\Psi}$.

Задача 8. (Обращение задачи 5.) $\mathbb{C}$-представления конечной группы с совпадающими характерами эквивалентны.

Задача 9. Пусть Φ — $\mathbb{C}$-представление конечной группы G. Тогда $\langle \chi_\Phi, \chi_\Phi \rangle$ — целое число, равное 1 в точности тогда, когда Φ — неприводимое представление.
Обозначение: $|C_G(g)|$ — число элементов в классе сопряженности $C_G(g)$ элемента g группы G.
Задача 10. *Второе соотношение ортогональности.* Пусть χ_i, $i = 1, \dots, r$ — все еприводимые характеры конечной группы G. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} 0, & \text{если } g \text{ и } h \text{ не сопряжены,} \\ |C_G(g)|, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сведения о 2-транзитивных группах.

Определение 2. Пусть группа G транзитивно действует на множестве $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Для любого $g \in G$ обозначим $N(g)$ — число неподвижных точек при действии g. Говорим, что G действует *2-транзитивно*, если любую упорядоченную пару точек из Ω можно перевести в любую другую.
Задача 11. Пусть G транзитивно действует на множестве Ω. Докажите, что $\sum_{g \in G} N(g) = |G|$.
Указание: покажите, что $\sum_{g \in G} N(g) = \sum_{i=1}^{n} |G_i|$, где G_i — стационарная подгруппа элемента $i \in \Omega$.

Далее G — 2-транзитивная группа на множестве $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$.
Задача 12. Докажите, что $\sum_{g \in G} N(g)^2 = 2|G|$.
Указание: покажите, что $\sum_{g \in G_1} N(g) = 2|G_1|$ и $\sum_{g \in G} N(g)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h \in G_i} N(h)$.

Пусть Φ — естественное $\mathbb{C}$-представление группы G в пространстве $V = <e_1, e_2, \dots, e_n>$ с действием $\Phi(g)e_i = e_{g(i)}$.
Задача 13. Разложите Φ в прямую сумму неприводимых представлений.
Указание: покажите, что $\langle \chi_\Phi, \chi_\Phi \rangle = 2$.
Задача 14. Докажите, что каждая из групп $S_n, n > 2; A_n, n > 3$ обладает неприводимым $\mathbb{C}$-представлением Ψ степени $n - 1$ с характером

$$\chi_\Psi(g) = N(g) - 1.$$