Листок 3 **Алгебра-3** 26.09.02

Задача 1. Показать, что размерность неприводимого комплексного представления делит порядок группы.

Задача 2. Пусть C⊂G центр группы G и W ее неприводимое комплексное представление. Показать, что размерность W делит $|G|/|C|$.

Указание: рассмотреть представление $W^{\otimes n} = \underbrace{W \otimes \ldots \otimes W}_{n}$ группы $\underbrace{G \times \ldots \times G}_{n}$. Показать, что подгруппа $H \subset C \times \ldots C \subset G \times \ldots G$ состоящая из элементов $(x_1, \ldots, x_n)$, таких что $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, действует тривиально на $W \otimes \ldots \otimes W$. Рассмотреть $W \otimes \ldots \otimes W$ как неприводимое представление группы $(G \times \ldots \times G)/H$.

Обозначение: Пусть H⊂G подгруппа группы G, тогда
а) любое G-представление V можно ограничить на H. Полученное представление обозначается $Res_H^G V$ или просто $\mathrm{Res}\, V$.
б) любое представление W подгруппы H можно индуцировать на всю группу G. Полученное представление обозначается $Ind_H^G W$ или $\mathrm{Ind}\, W$.

$$Ind_H^G = \oplus_{\sigma \in G/H} \sigma \cdot W.$$

Задача 3. Пусть G и H⊂G коммутативные группы $H \cong Z/nZ$, $G \cong Z/mnZ$, V – какое-нибудь неприводимое комплексное представление группы H. Описать $Ind_H^G V$ и разложить его на неприводимые.

Задача 4. Пусть $W = \oplus_i W_i$ – представления подгруппы H⊂G, тогда $Ind_H^G W = \oplus_i Ind_H^G W_i$.

Задача 5. Пусть V – представление группы G, W – представление подгруппы H⊂G. Показать, что $V \otimes Ind_H^G (W) \cong Ind_H^G \left(Res_H^G V \otimes W \right)$. Чему изоморфно $Ind_H^G \left(Res_H^G V \right)$?

Задача 6. Пусть H⊂K⊂G – цепочка вложенных групп, W – представление группы H. Показать, что $Ind_H^G W = Ind_K^G \left(Ind_H^K W \right)$.

Задача 7. Пусть C – класс сопряженных элементов группы G, и C$\cap H$ распадается в объединение классов сопряженности $D_1, \ldots, D_r$ в подгруппе $H \subset G$, тогда для любого представления W группы H справедлива следующая формула характеров:

$$\chi_{Ind_H^G W}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^{r} \frac{|D_i|}{|C|} \chi_W (D_i).$$

Как выглядит эта формула, если W тривиально?

Задача 8. Пусть W представление подгруппы H⊂G, U – представление G, и предположим, что $V = \mathrm{Ind}_H^G W$. Тогда
а) любой морфизм H-представлений $\varphi : W \to U$ однозначно продолжается до морфизма G-представлений $\tilde{\varphi} : W \to U$, то есть

$$Hom_H (W, ResU) = Hom_G (IndW, U).$$

б) $(\chi_{IndW}, \chi_U)_G = (\chi_W, \chi_{ResU})_H$ – формула Фробениуса взаимности характеров.

Задача 9. а) Рассмотрим циклическую подгруппу $H \cong$ Z / nZ в симметрической группе S_n порожденную элементом T переводящим $1 \mapsto 2 \mapsto \ldots \mapsto n \mapsto 1$. Найти характеры представления индуцированного с примитивного характера подгруппы H (то есть характера порожденного примитивным корнем n-ойстепени из 1).
б) В случае n=4 разложить получающееся представление на неприводимые.