Листок 4 (теорема Гурвица)

В этом листке штрих обозначает транспонирование матрицы.

Группы. Пусть G – группа, порожденная элементами $\langle t_1, \ldots, t_{n-1}, s\rangle$ $(n \geq 2)$ с определяющими соотношениями

$$t_i^2 = s, \quad s^2 = 1, \quad t_i t_j = s t_j t_i, \quad (i \neq j)\,, \quad 1 \leq i, j \leq n-1.$$

1. Доказать, что

а) Порядок $|G| = 2^n$.

б) При $n \geqslant 3$ порядок коммутанта $|(G,G)| = 2$.

в) Если n нечетно, то центр $Z(G) = \{1, s\}$, а если четно, то $Z(G) = \{1, s, st_1 \ldots t_{n-1}, t_1 \ldots t_{n-1}\}$.

2. Если элемент $g \in G$ не лежит в центре, то класс $C(g)$ элементов, сопряженных с g, состоит из g и sg. Доказать.

3. Доказать, что число классов сопряженных элементов в группе G равно $\begin{cases} 2^{n-1}+1 & n \text{ нечетно,} \\ 2^{n-1}+2 & n \text{ четно.} \end{cases}$

4. Найти размерности всех различных неприводимых представлений группы G.

Формы. Предположим, что

$$\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 \tag{\&}$$

и при этом z_i – билинейные функции от $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

При каких n такое возможно?

Ответ Гурвица: при n= 1, 2, 4 и 8.

Пример. $\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2\right) = \left(x_1 y_1 - x_2 y_2\right)^2 + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)^2$

Введем обозначение $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (x, x)$

5. Доказать, что соотношение (&) равносильно существованию такой $n \times n$ матрицы $T(x) = (t_{ij}(x))$, что

а) $t_{ij}(x)$ — линейные функции от x.

б) $T^{'}T = (x, x)\, E$.

(Указание: записать $z_i = \sum\limits_{k=1}^{n} l_{ik}(x)\, y_k$, где $l_{ik}(x)$ — линейные функции от x, и подставить в соотношение (&))

Так как $t_{ij}(x)$ — линейные функции от x, то

$T(x) = T_1 x_1 + \ldots + T_n x_n$, где T_i – комплексные $n \times n$ матрицы.

6. Доказать, что

$$T_i' T_i = E, \quad T_i' T_j + T_j' T_i = 0, \quad i \neq j$$

7. (Нормализация). Положим $Q_i = Q_n' T_i$. Показать, что тогда

$Q_i' Q_i = E, \quad Q_i' + Q_i = 0, \quad i = 1, \ldots n-1, \quad Q_n = E, \quad Q_i' Q_j + Q_j' Q_i = 0$ $(i \neq j)$.

8. Доказать, что отображение $t_i \mapsto Q_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $s \mapsto -E$, определяет n-мерное линейное представление группы G.

9. Используя результат задачи 4, доказать теорему Гурвица.