Листок 6 **Алгебра-3** 17.10.02

Задача 1. Пусть A - линейный оператор векторного пространства V и G - группа всех операторов, перестановочных с A. Доказать, что G - алгебраическая группа Ли.

Задача 2. а) Пусть P(x) - полином на векторном пространстве V^n. Доказать, что группа G$\subset$**GL(V)** линейных операторов, для которых P является инвариантом, то есть P(Ax)=P(x), есть алгебраическая группа.
б) Показать, что ортогональная группа может быть получена таким образом.
в) Какая группа получается, если n=2 и P$(x_1,x_2) = x_1^3+x_2^3$.

Задача 3. Доказать, что ряд $exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ сходится для любой матрицы $A\in\mathbf{Mat}_n(\mathbf{R})$ или $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{C})$. Доказать, что **exp** есть гладкое отображение из пространства матриц в линейную группу, определяющее диффеоморфизм окресности нуля на окрестность единицы.

Задача 4. Доказать, что $\mathbf{det}(\ \mathbf{exp}(\ A)) = \mathbf{exp}(\ \mathbf{tr}(\ A)\ )$.

Задача 5. Найти $\mathbf{exp}\left(\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Задача 6. Найти $\mathbf{exp}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$.