Листок 7. Односвязность группы $SL(n, \mathbb{C})$.

Пусть H_n^+ — конус положительно определенных комплексных эрмитовых $n \times n$ матриц, $D = H_n^+ \cap SL(n, \mathbb{C})$.

1. Доказать, что из любого $p \in H_n^+$ можно извлечь единственный $\sqrt{p}$, лежащий в H_n^+.

2. Доказать, что извлечение корня является гомеоморфизмом $H_n^+ \to H_n^+$, сохраняющим D.

3. Доказать, что для любой матрицы $x \in GL(n, \mathbb{C})$ существуют такие однозначно определенные матрицы $u \in U(n)$ и $p \in H_n^+$, что $x = up$ (полярное разложение).

4. Доказать, что отображение $(u, p) \to up$ является гомеоморфизмом $SU(n) \times D$ на $SL(n, \mathbb{C})$.

5. Доказать односвязность группы $SL(n, \mathbb{C})$.

$$PSL(2, \mathbb{C}) \cong SO^E(3, 1)$$

6. Докажите, что группа $O(3, 1)$ вещественных автоморфизмов квадратичной формы Лоренца $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$ имеет четыре связные компоненты. (Указание: рассмотрите действие этой группы на световом конусе $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$ и получите геометрическое описание компонент).

7. Найти компоненту единицы $O^E(3, 1)$ и вычислить её размерность.

8. Рассмотрим естественное линейное действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ в четырехмерном вещественном пространстве эрмитовых 2×2 матриц H_2: $h \to gh\bar{g}^t$, $h \in H_2$, $g \in SL(2, \mathbb{C})$.
Доказать, что $\det h$ — квадратичная форма на H_2 сигнатуры $(3, 1)$.
Тем самым, возникает гомоморфизм $SL_2(\mathbb{C}) \to SO^E(3, 1)$.

9. Доказать, что $ker\varphi = \{\pm E\}$.

10. Доказать, что φ — эпиморфизм, и получить $SL_2(\mathbb{C})/\langle \pm E \rangle = PSL_2(\mathbb{C}) \cong SO^E(3, 1)$.