Листок 8 **алгебра-3** 31.10.02

Инварианты.

Задача 1. Докажите, что многочлен $\sum x_i^2$ является образующей в алгебре инвариантов группы $O(n)$.

Задача 2. Докажите, что многочлен $\sum |z_i|^2$ является образующей в алгебре инвариантов группы $U(n)$.

Задача 3. Докажите, что коэффициенты характеристического многочлена $|X-\lambda E|$ являются образующими алгебры инвариантов для группы линейных преобразований $X \to AXA^t$, $A \in O(n)$ в пространстве симметрических матриц $\mathrm{Mat}_{sym}(n)$.

Задача 4. Пусть G, H — линейные группы Ли. Если G – связна и $\mathrm{Lie}\, G \subsetneqq \mathrm{Lie}\, H$, то $G < H$. Если G и H связны и $\mathrm{Lie}\, G = \mathrm{Lie}\, H$, то $G = H$.

Задача 5. Пусть G — связная линейная группа Ли. Вектор v тогда и только тогда инвариантен относительно всех преобразований из G, когда $Xv = 0$ для всех $X \in \mathrm{Lie}\, G$.

Задача 6. Найти алгебру Ли для групп $U(n)$, $SU(n)$, SP_{2n}, SL_n.

Задача 7. а) Докажите, что если $A \in SL(2,\mathbb{R})$ и $\mathrm{tr}\, A < -2$, то A - нельзя представить в виде $\exp X$, где $X \in \mathrm{Lie}\, SL(2,\mathbb{R})$.

б) Докажите, что если $A \in SL(2,\mathbb{R})$ и $\mathrm{tr}\, A > -2$, то A - можно представить в виде $\exp X$, где $X \in \mathrm{Lie}\, SL(2,\mathbb{R})$.

в) Найдите $\exp^{-1} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. (В классе вещественных матриц.)

г) Докажите, что если $A \in SL(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\, A = -2$ и A представима в виде $\exp X$, $X \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$, то $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

д) Найдите $\exp^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. (В классе вещественных матриц.)

Задача 8. Найдите все однопараметрические подгруппы в $SL(2,\mathbb{R})$.

Задача 9. Докажите, что любая однопараметрическая подгруппа в $GL(n,\mathbb{C})$ имеет вид $\exp(tA)$, для некоторой матрицы $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$.

Пример нематричной группы Ли.

Для каждого $a \in \mathbb{R}$ и каждого $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, рассмотрим отображение $\rho_{a,z} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\rho_{a,z}(x) = x + 2\pi a + \tfrac{1}{i}\ln\tfrac{1-ze^{-ix}}{1-\bar{z}e^{ix}}.$$

Здесь ln обозначает непрерывную ветвь натурального логарифма, определяемую условием $\ln 1 = 0$.

Задача 10. Проверьте, что $\rho_{a,z}$ является отображением $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Задача 11. Докажите, что множество $\{\rho_{a,z}\}$ образует связную трехмерную группу Ли, которую мы будем обозначать $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$.

Задача 12. Докажите, что множество $\{\rho_{a,0}\}$ образует однопараметрическую подгруппу в $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$, причём $\rho_{a,0}$ лежит в центре, тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{Z}$.

Задача 13.

а) Докажите, что $\rho_{a,z}(x + 2\pi k) = \rho_{a,z}(x) + 2\pi k$, и, следовательно, $\rho_{a,z}$ определяет преобразование окружности $|\omega| = 1$

$$\omega \mapsto \tfrac{\omega - z}{1-\bar{z}\omega}e^{2\pi i a}.$$

b) Докажите, что в предыдущем пункте построен гомоморфизм группы $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ в группу $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{\pm E\}$ дробно линейных преобразований единичной окружности в $\mathbb{C}$, образ которого — $PSL(2,\mathbb{R})$, а ядро — $\{\rho_{n,o}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

в) Докажите, что центр группы $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ исчерпывается преобразованиями $\rho_{n,o}$, $n \in \mathbb{Z}$.

г) Докажите, что построенное отображение является изоморфизмом в некоторой окрестности единицы.

Задача 14. Пусть G — группа Ли такая, что у неё есть однопараметрическая подгруппа, которая имеет с ее центром бесконечное пересечение, но не содержится в этом центре. Докажите, что ни при каком $n \in \mathbb{N}$ не существует инъективного гомоморфизма $G \to GL(n,\mathbb{C})$.