Листок 9 алгебра-3 07.11.02

Задача 1. Пусть G - связная коммутативная линейная группа Ли. Тогда exp: Lie $G \to G$ является эпиморфизмом векторной группы на группу G. Ядро этого гомоморфизма дискретно.

Задача 2. Пусть ϕ — гомоморфизм линейной группы Ли G в линейную группу H. Доказать, что $\phi(\exp X)=\exp(d\phi(X))$ для любого $X\in$Lie G.

Задача 3. Если G и H - связные линейные группы Ли и Lie G=Lie H, то G=H.

Задача 4. Связная группа Ли G порождается любой окрестностью единицы.

Задача 5. Пусть G - компактная линейная группа Ли, σ_g - симметрия в точке g, $\gamma(t)$ - геодезическая на группе G, $\gamma(0)=p$, $\gamma(s)$=q. Тогда $(\sigma_q\sigma_p)(\gamma(t))=\gamma(t+2s)$.

Задача 6. Связная линейная группа Ли абелева тогда и только тогда, когда абелева её алгебра Ли.

Задача 7. Образ Ad G линейной группы Ли при её представлении Ad: $G \to GL($Lie $G)$, $(\mathrm{Ad}g)(X)=gXg^{-1}$ является линейной группой Ли. Найти Lie(AdG).

Задача 8. Связная линейная группа Ли G обладает двусторонне инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда замыкание её образа Ad G в $GL($Lie $G)$ компактно.

Задача 9. Пусть g - алгебра Ли. Показать, что её форма Киллинга $B(u,v) = tr\,(ad\,(u)\circ ad\,(v))$ является инвариантной симметричной билинейной формой, где ad:g $\to$ gl(g) - присоединённое представление $ad\,(u)\,(v) = [u,v]$.

Задача 10. Показать, что форма Киллинга для алгебры Ли $gl(n)$ группы $GL(n)$ имеет вид $B(u,v) = 2ntr\,(uv) - 2tru\cdot trv$. Доказать, что она вырождена.

Задача 11. Найти форму Киллинга групп $O(3)$, $O(2,1)$, $SL(2,\mathrm{R})$.

Задача 12. Найти форму Киллинга алгебр Ли $sl\,(n)$, $so\,(n,m)$.

Задача 13. Проверив, что $h \subset so(k+m,\mathrm{R})$, состоящая из матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $A\in so(k,\mathrm{R})$, $B\in so(m,\mathrm{R})$, есть подалгебра Ли, найти ортогональное дополнение $h\perp$ относительно формы Киллинга.