Экзаменационные задачи по алгебре.

1. Сформулируйте теорему о классификации конечно порожденных абелевых групп и приведите следующие абелевы группы к канонической форме: a) $\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$; b) $(\mathbb{Z}/800\mathbb{Z})^*$; c) $\mathbb{F}_{32}^*$.

2. Докажите, что характеристический многочлен оператора делит некоторую степень его минимального многочлена.

3. Рассмотрим поле $K(\alpha)$ (α алгебраичен) как векторное пространство над полем K. Пусть A — оператор умножения на α. Докажите, что $\chi_A(t) = m_A(t) = \mathrm{Irr}_\alpha^K(t)$.

4. Докажите, что оператор A в векторном пространстве V полупрост тогда и только тогда, когда для любого подпространства $U\subset V$, такого что $A(U)\subset U$ существует подпространство $U'\subset V$, такое что $A(U')\subset U'$ и $V = U\oplus U'$.

5. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение полей. Назовем элемент $\alpha\in K$ целым над $\mathbb{Z}$, если существует многочлен $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ со старшим коэффициентом 1, такой что $p(\alpha) = 0$. Докажите, что множество A всех целых над $\mathbb{Z}$ элементов поля K является целостным кольцом, полем частных которого является поле K.

6. Рассмотрим действие группы $\mathfrak{S}_n$ сопряжениями на множестве всех своих циклических подгрупп порядка k. При каких k действие будет транзитивным?

7. Для каждого n постройте расширение Галуа $K/\mathbb{Q}$ с $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

8. Опишите все левые, правые и двусторонние идеалы в кольце $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, где K — поле.