Экзаменационные задачи по алгебре.

1. Сформулируйте теорему о классификации конечно порожденных абелевых групп и приведите следующие абелевы группы к канонической форме: a) $\mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/63\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/147\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/378\mathbb{Z}$; b) $(\mathbb{Z}/432\mathbb{Z})^*$; c) $\mathbb{F}_{81}^*$.

2. Опишите орбиты действия группы $\mathrm{Aut}(V)$ на множестве всех операторов в векторном пространстве V с минимальным многочленом $m_A(t) = t^2 - 1$.

3. Пусть $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ — неприводим. Докажите, что $f(x) | x^{q^n} - x \iff \deg f | n$.

4. Пусть K — алгебраически замкнуто, V — векторное пространство над K, $\dim V = n$, а A и B — операторы в V, такие что $AB = BA$. Докажите, что найдется базис в V, в котором матрица обоих операторов A и B верхнетреугольная.

5. Пусть $f(x) \in K[x]$ — неприводим, а L/K — конечное расширение Галуа. Пусть $g(x), h(x) \in L[x]$ — неприводимые делители многочлена $f(x)$. Докажите, что $\exists \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, такой что $h(x) = g^\sigma(x)$.

6. Опишите орбиты действия группы $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на множестве $\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ корней из 1.

7. Пусть $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, p — простое число, такое что $p \not| a_n$, $p | a_i$ при $i < n$, но $p^2 \not| a_0$. Докажите, что $f(x)$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.