НМУ, 1 курс 8.12.2002

# Математический анализ

## Экзамен.

**Задача 1. 1)** Рационально ли число $\operatorname{tg} 1^\circ$? **2)** Найдите это число с точностью до $0{,}01$.

**Задача 2.** Исследуйте последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ на сходимость и на равномерную сходимость на отрезках $[0,1]$ и $[\delta,1]$ (где $\delta > 0$).

**Задача 3.** Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\sin x) - \operatorname{sh} x}{(\sqrt[5]{\cos x} - 1)^2 \operatorname{arctg} x}$.

**Задача 4.** Постройте кривую

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^2-4} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t+2} \end{cases}$$

**Задача 5.** Вычислите интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x(\operatorname{tg}^3 x + 1)}$.

**Задача 6.** Пусть $f$ — непрерывная функция на $[0,\pi]$. Докажите, что

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

**Задача 7.** Докажите, что функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна $\iff$ она продолжается до непрерывной функции на $[a,b]$.

**Задача 8.** Известно, что ряд $\sum_n a_n$ сходится. Верно ли, что ряд $\sum_n a_n^3$ сходится?

**Задача 9.** Пусть $a_n > 0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k$, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Докажите, что ряд $\sum_n a_n/S_n$ расходится.

**Задача 10.** Пусть $f$ — дифференцируемая функция на $[0,1]$, $f(0) = 0$ и $|f'(x)| \le C|f(x)|$ для всех $x \in [0,1]$ (где $C > 0$ — фиксированная константа). Докажите, что $f \equiv 0$.

**Задача 11.** Пусть $f$ — бесконечно дифференцируемая функция на прямой, и $f^{(n)}(0) \ne 0$ для каждого $n$. Рассмотрим разложение Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,$$

где $\theta = \theta_n(x) \in [0,1]$. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \theta_n(x)$.