Программа курса И. В. Аржанцева

Коммутативная алгебра, комбинаторика и инварианты конечных групп (по работам Р. Стенли)

Независимый Московский университет, осень 2002 г.

Задачи

Обозначения и соглашения. Всюду далее под *градуированной алгеброй* понимается коммутативная ассоциативная градуированная алгебра $B = \oplus_{n\geq 0} B_n$ с единицей, все компоненты B_n которой конечномерны и компонента B_0 совпадает с основным полем K, которое можно считать полем комплексных чисел. Если не оговорено противное, алгебра B предполагается конечно порожденной. Определим ряд Пуанкаре алгебры B как

$$F(B,\lambda) := \sum_{n\geq 0} (\dim B_n)\lambda^n.$$

Градуированная алгебра *стандартна*, если она порождается элементами первой степени. Группа G всюду предполагается конечной и линейно действующей в пространстве $V \cong K^n$. Алгебра многочленов $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ отождествляется с алгеброй регулярных функций на пространстве V. Тем самым определены линейное действие $G : A$ и алгебра инвариантов A^G, наделенная естественной градуировкой по степеням многочленов.

1. Пусть B – градуированная алгебра и $B^d = \sum_{n\geq 0} B_{nd}$. Доказать, что для некоторого d алгебра B^d является стандартной.

2. Назовем градуированную алгебру почти стандартной, если она порождается однородными элементами одной степени. Доказать, что в любой градуированной алгебре B можно выбрать почти стандартную свободную подалгебру B_0, такую что B цела над B_0.

3. Существует ли градуированная алгебра, которая не является конечно порожденной и ряд Пуанкаре которой

   а) может

   б) не может

   быть задан рациональной функцией ?

4. Пусть B – градуированная алгебра, обладающая алгебраически независимой системой образующих. Доказать, что такие образующие можно выбрать однородными.

5. Существует ли стандартная градуированная алгебра с набором размерностей

   а) $(1, 4, 6, 9, 13)$;

   б) $(1, 4, 6, 9, 9)$?

   Если да, укажите явный пример такой алгебры.

6. Пусть B – градуированная алгебра и $b_1, \ldots, b_k$ – ее однородные образующие степеней $d_1, \ldots, d_k$ соответственно. Доказать, что $b_1, \ldots, b_k$ алгебраически независимы тогда и только тогда, когда $F(B, \lambda) = 1/(1-\lambda^{d_1}) \ldots (1-\lambda^{d_k})$.

7. Пусть Γ – конечно порожденная подполугруппа в Z_+^n. Найти критерий целозамкнутости полугрупповой алгебры $K[\Gamma]$.

8. Рассмотрим выпуклый конечнопорожденный конус K в Q_+^n и предположим, что $A^G =< x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in K >$. Доказать, что $A = A^G$.

9. Пусть $G = \{\pm E\} : K^n$. Доказать, что если $\theta_1, \ldots, \theta_n$ – осп в A^G, то число образующих A^G как $K[\theta_1, \ldots, \theta_n]$-модуля $\geq 2^{n-1}$.

10. Существует ли точное вещественное представление группы кватернионов Q_8, для которого алгебра инвариантов свободна ?

11. Пусть $G : V$ – линейное действие, порожденное отражениями и $h_1, \ldots, h_n$ – однородные алгебраически независимые элементы алгебры A^G степеней $d_1, \ldots, d_n$ соответственно. Доказать, что если $d_1 \ldots d_n =\mid G \mid$, то $A^G = K[h_1, \ldots, h_n$.

12. Доказать, что алгебра A^G свободна тогда и только тогда, когда A – свободный A^G-модуль.

13. Пусть B – градуированная алгебра размерности Крулля d и q – порядок полюса рациональной функции $F(B, \lambda)$ при $\lambda = \infty$. Разложим $F(B, \lambda)$ по степеням $(1-\lambda)$:
$$F(B, \lambda) = \frac{c_0}{(1-\lambda)^d} + \frac{c_1}{(1-\lambda)^{d-1}} + \ldots$$
Доказать, что если B горенштейнова, то $\frac{2c_1}{c_0} = q - d$.

14. Пусть $P(\lambda) = \sum_{n \geq 0} a_n \lambda^n$. Определим $\bigtriangledown F(\lambda) = a_0 + (a_1 - a_0)\lambda + (a_2 - a_1)\lambda^2 + \ldots$. Пусть B – стандартная алгебра глубины $\geq r$. Доказать, что $\bigtriangledown^r P(B, \lambda)$ – ряд с неотрицательными коэффициентами.

15. Пусть $G : V$ – линейное действие, порожденное отражениями и $f_1, \ldots, f_n$ – базисные инварианты. Доказать, что $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ – полуинвариант веса $\det$.

16. Существует ли неединичная конечная группа, все комплексные представления которой имеют свободную алгебру инвариантов ?

17. Можно ли среди стандартных алгебр Коэна-Маколея охарактеризовать горенштейновы алгебры только в терминах ряда Пуанкаре ?

18. Доказать, что стандартно градуированная алгебра $K[x, y]/(y^2, x^2y, x^4)$ не может быть реализована как фактор градуированной области Коэна-Маколея по идеалу, порожденному регулярной последовательностью.

19. Пусть $G : V$ – линейное действие над полем комплексных чисел, определяющее неприводимое представлние группы G. Доказать, что в A^G имеется однородная система параметров, начинающаяся элементом степени 2 тогда и только тогда, когда в некотором базисе все элементы группы G действуют как вещественные матрицы. Верно ли это утверждение без предположения о неприводимости ?

20. Получить теорему о многочлене Гильберта (полиномиальный рост размерностей у стандартной алгебры) как следствие теоремы Гильберта о сизигиях.

21. Пусть $G = \{\pm E\} : K^n$. Найти тип алгебры A^G. В частности, для каких значений n алгебра A^G горенштейнова ?

22. Пусть B – градуированная алгебра, $T \subset B$ – подалгебра, порожденная некоторой осп в B и $S = B/T_+B$. Пространство $\mathrm{Hom}_T(B, T)$ имеет естественную структуру B-модуля: $(b\phi)(x) = \phi(bx)$. Доказать, что минимальное число образующих этого модуля равно $\dim \mathrm{Soc}(S)$, где $\mathrm{Soc}(S) = \{s \in S \mid s_1 s = 0 \ \ \forall s_1 \in S_+\}$.

23. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ – осп в алгебре многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$. Доказать, что цоколь порожден элементом $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$.