Задачи экзамена по курсу
«Классифицирующие пространства»
М. Э. Казарян (2001-2002 уч год)

На отлично нужно набрать ≈ 50 баллов за задачи из разных тем.
Листки с решениями оставлять в моей ячейке в учебной части до 1 марта 2003.

I. Двойственность Пуанкаре, изоморфизм Тома, спектральная последовательнсть расслоений.

1 (20). Пусть $B_2(M)$ — конфигурационное пространство неупорядоченных пар различных точек замкнутого n-мерного многообразия M. Докажите, что $\mathbb{Z}_2$-числа Бетти пространства $B_2(M)$ определяются числамми Бетти самого многообразия M. Вычислите полное число Бетти $\sum b_i$, где $b_i = \dim H^i(B_2(M), \mathbb{Z}_2)$, а также многочлен Пуанкаре $\sum b_i t^i$.

II. Квадраты Стинрода.

2 (15). Найдите формулу для действия квадратов Стинрода на классы Штифеля-Уитни

$$\mathrm{Sq}^k \omega_m = \sum_{i=0}^{k} C_?^? \omega_{k-i} \omega_{m+i}.$$

3 (10). Обозначим $\mathrm{Sq} = 1 + \alpha$. Выразите через допустимые мономы однородные составляющие до степени 5 ряда $(\mathrm{Sq})^{-1} = 1 - \alpha + \alpha\,\alpha - \alpha\,\alpha\,\alpha + \dots$.

4 (10). Вычислите выражение через классы Штифеля-Уитни однородных составляющих до степени 5 класса Ву $v = \mathrm{Sq}^{-1}\omega$, где $\omega = 1 + \omega_1 + \omega_2 + \dots$.

III. Кобордизмы.

5 (10). Какие имеются соотношения между $\bmod 2$-характеристическими числами 4-мерных многообразий?

6 (10). Найдите $\pmod 2$-характеристические числа следующих многообразий: $\mathbb{R}P^4$, $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^3$, $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$, $\mathbb{C}P^2$, $H^{\mathbb{R}}_{2,3}$, где $H^{\mathbb{R}}_{p,q}$ — гиперповерхность в $\mathbb{R}P^p \times \mathbb{R}P^q$, заданная общим билинейным уравнением.

Выберите базис в группе Ω^O_4, и выразите классы кобордизмов указанных многообразий через базисные.

7 (10). Найдите характеристические числа следующих комплексных многообразий: $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, $H^{\mathbb{C}}_{1,2}$, $s_1(\mathbb{C}P^3)$, где s_1 — операция Ландвебера-Новикова, отвечающая первому классу Чженя в кобордизмах. Найдите соотношения между классами указанных многообразий в группе Ω^U_4.

8 (20). Пусть $\varkappa$ — расслоение на $\mathbb{C}P^3$, двойственное линейному тавтологическому (в алгебраической геометрии $\varkappa$ обозначается часто через $\mathcal{O}(1)$), $\sigma_1(\varkappa)$ — его первый класс Чженя со значениями в унитарных кобордизмах. Определите подмногообразие в $\mathbb{C}P^3$, задающее элемент $\sigma_1(\varkappa^{\otimes k})$. Выразите через образующие, найденные в предыдущей задаче, класс этого многообразия

$$\sigma_1(\varkappa^{\otimes k}) \cdot [\mathbb{C}P^3] \in \Omega_4^U.$$

Верно ли, что $\sigma_1(\varkappa^{\otimes k}) + \sigma_1(\varkappa^{\otimes l}) = \sigma_1(\varkappa^{\otimes (k+l)})$?

Какой ответ для класса $\sigma_1(\varkappa^{\otimes k}) \cdot [\mathbb{C}P^3] + \sigma_1(\varkappa^{\otimes l}) \cdot [\mathbb{C}P^3]$ предсказывает формула для формальной группы унитарных кобордизмов?

IV. Расслоения Серра и их применения для вычисления гомотопических групп.

9 (5+5+5). а) Вспомните, чему равны рациональные когомологии $H^*(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Q})$ пространств Эйленберга-Маклейна.

б) Докажите, что высшие гомотопические группы нечетномерных сфер $\pi_{n+k}(S^n)$, $k > 0$, являются группами кручения.

в) Вычислите $\pi_{n+k}(S^n) \otimes \mathbb{Q}$ для всех k и четных n.

10 (5+10+10+5). Гомотопические группы букета. а) Опишите когомологии малых размерностей убивающего пространства X, заданного как слой расслоения

$$S^2 \bigvee S^2 \xrightarrow{X} K(\mathbb{Z}_2) \times K(\mathbb{Z}_2),$$

индуцирующего изоморфизм в $H^2(\cdot, \mathbb{Z})$.

б) Найдите группу $\pi_3(S^2 \bigvee S^2)$ и опишите инварианты, выражающие слагаемые в этой группе

в) Определите ранг (т.е. количество слагаемых, изоморфных $\mathbb{Z}$) группы $\pi_4((S^2 \bigvee S^2)$.

г) Ответьте на вопросы пп. б) и в) для *стабильных* гомотопических групп.