НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 2002
Экзаменационные задачи

1. Доказать, что любая симметрическая $\mathfrak{g}$-инвариантная билинейная форма на простой комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ пропорциональна форме Картана-Киллинга.

2. Рассмотреть билинейную форму ω на простых классических алгебрах Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n)$:
$$\omega(A, B) = \mathrm{tr} AB, \quad A, B \in \mathfrak{g}.$$
Доказать, что ω пропорциональна форме Картана-Киллинга и найти коэффициент пропорциональности.

3. Описать все неприводимые конечномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$.

4. Разложить на неприводимые тензорное произведение $L_n \otimes L_m$ двух неприводимых представлений $L - n$ и L_m алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ со старшими весами n и m соответственно.

   В качестве следствия получить разложение

   (a) тензорного квадрата стандартного представления $\mathfrak{sl}(2)$;

   (b) тензорного произведения стандартного и присоединенного представлений алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$;

   (c) тензорного квадрата присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$;

   (d) тензорного квадрата стандартного представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$;

   (e) симметрического квадрата стандартного представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$;

   (f) внешнего квадрата стандартного представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$.

5. Описать все связные вещественные четырехмерные разрешимые группы Ли с трехмерным коммутантом.

6. Описать все связные пятимерные вещественные группы Ли, не являющиеся разрешимыми.

7. Описать все связные вещественные полупростые группы Ли, размерность которых не превосходит 6.

8. Нарисовать на плоскости систему корней типа G_2. Для простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ типа G_2 вычислить ее размерность, ранг, картановскую подалгебру, систему корней и систему простых корней, группу Вейля. Доказать, что $\mathfrak{g}$ содержит подалгебру, изоморфную $\mathfrak{sl}(3)$