НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 02
Задачи промежуточного экзамена

1. Описать все (с точностью до изоморфизма) трехмерные алгебры Ли
   (a) над полем $\mathbb{C}$;
   (b) над полем $\mathbb{R}$.

2. Описать явный матричный вид алгебр Ли следующих вещественных групп Ли:
   (a) $SO(n)$;
   (b) $SO(n,n)$;
   (c) $Sp(2n)$;
   (d) $SU(n)$.

3. Описать все дифференцирования (по модулю внутренних)
   (a) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;
   (b) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$;
   (c) алгебры Ли аффинных преобразований прямой $\mathfrak{ga}(1)$;
   (d)) $\mathfrak{sl}(2)$.

4. Описать все неприводимые конечномерные представления
   (a) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;
   (b) алгебры Ли аффинных преобразований прямой $\mathfrak{ga}(1)$;

5. Указать точное конечномерное представление
   (a) n-мерной коммутативной алгебры Ли;
   (b) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

6. Описать все (с точностью до изоморфизма) связные вещественные группы Ли
   (a) размерности 2;
   (b) размерности 3.

7. Описать все (с точностью до изоморфизма) связные одномерные комплексные группы Ли.

8. Описать явно группу Гейзенберга $Hei(2n+1)$: связную односвязную вещественную группу Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{hei}(2n+1)$.

9. Описать орбиты коприсоединенного представления

   (a) группы Гейзенберга $Hei(2n+1)$;
   (b) группы аффинных преобразований прямой $GA(1)$;
   (c) ортогональной группы $SO(3,\mathbb{R})$;
   (d) специальной линейной группы $SL(2,\mathbb{R})$.

10. Доказать, что группа Ли $SU(1,1)$ состоит из матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{smallmatrix}\right)$, $z, w \in \mathbb{C}$; $z\bar{z} - w\bar{w} = 1$ и изоморфна $SL(2,\mathbb{R})$.

11. Выписать в матричном виде изморфизм $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$.

12. Доказать изоморфизмы следующих вещественных алгебр Ли:

    (a) $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$;
    (b) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$

    Какие изоморфизмы классических групп Ли порождают эти изоморфизмы алгебр Ли?

13. Пусть $G_i = SL(V_i) \cong SL(2,\mathbb{C})$, $i = 1, 2$ — специальные линейные группы Ли, действующие в двумерных комплексных линейных пространсвах V_1 и V_2. Рассмотрев естественное действие прямого произведения $G_1 \times G_2$ в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$, доказать изоморфизм комплекных алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$. Какой изоморфизм комплексных групп возникает при этом?

    Описать изоморфизмы вещественных групп и алгебр Ли, возникающие из аналогичной вещественной конструкции.

14. Рассмотрев естественное действие группы Ли $SL(4,\mathbb{C}) = SL(V)$ и ее подгруппы $Sp(4,\mathbb{C}) = Sp(V)$ в пространстве $\Lambda^2(V)$, доказать изоморфизм комплекных алгебр Ли $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(6,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$. Какие изоморфизмы комплексных групп возникает при этом?

    Описать изоморфизмы вещественных групп и алгебр Ли, возникающие из аналогичной вещественной конструкции.

15. Пусть G — это группа линейных преобразований n-мерного векторного пространства над телом кватернионов, сохраняющих кватернионную эрмитову форму $(p,q) = p_1\bar{q}_1 + \ldots p_n\bar{q}_n$. Доказать, что G изоморфна унитарно-симплектический группе: $G \cong Sp(2n,\mathbb{C}) \cap U(2m)$.

16. Описать компактные вещественные формы классических комплексных групп Ли $SL(n,\mathbb{C}), SO(n,\mathbb{C})$ и $Sp(2n,\mathbb{C})$.