НМУ, 1 курс 9.03.2003

Математический анализ

Экзамен.

Задача 1. Пусть f — дважды дифференцируемая на интервале функция, обладающая обратной, причем $f'(x) \neq 0$. Докажите, что f^{-1} дважды дифференцируема, и найдите $(f^{-1})''(y)$.

Задача 2. Пусть $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. Найдите $f^{(100)}(0)$.

Задача 3. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos^{n+4} x}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 4. Постройте кривую

$$\begin{cases} x(t) = t^2(t-1)^3 \\ y(t) = t^3(t-1)^2 \end{cases}$$

Задача 5. Вычислите интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2(x-1)^5}}$.

Задача 6. Пусть $\tau(n)$ — число делителей n. Сходится ли ряд $\sum_n \dfrac{\tau(n)}{n^2}$?

Задача 7. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел. Известно, что существует такое $C > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого конечного подмножества $I \subset \mathbb{N}$ из n элементов выполнена оценка $\sum\limits_{k \in I} a_k \leq C\sqrt{n}$. Докажите сходимость ряда $\sum_n a_n^3$.

Задача 8. Пусть $f \in C[a,b]$ такова, что $\displaystyle\int_a^b x^k f(x)\, dx = 0$ для всех $k = 0, \ldots, n$. Докажите, что f имеет на $[a,b]$ не менее, чем $n+1$ нулей.

Задача 9. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, причем $f(x) = c_0 + c_1 x + o(x^2)$ при $x \to 0$, и f' монотонна в окрестности нуля.
1) Докажите, что $f''(0)$ существует и равна нулю.
2) Венро ли это утверждение без предположения о монотонности f'?

Задача 10. Докажите, что выпуклая на интервале функция непрерывна.

Задача 11. Пусть f — бесконечно дифференцируемая функция на прямой, причем $f(1/n) = 0$ для всех натуральных n. Известно, что существует такое $C > 0$, что $|f^{(n)}(x)| \leq C$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $n = 0, 1, \ldots$. Докажите, что $f \equiv 0$.