НМУ, 1 курс 7.10.2002

Математический анализ

## Контрольная работа.

**Задача 1.** Найдите пределы: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$

**Задача 2.** Известно, что последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел. Чему может быть равен $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$?

**Задача 3.** Даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$. Известно, что $x_1=a$, $y_1=b$, $z_1=c$, и

$$x_n=\frac{y_{n-1}+z_{n-1}}{2},\quad y_n=\frac{x_{n-1}+z_{n-1}}{2},\quad z_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}.$$

Имеют ли эти последовательности пределы? Если да, то найдите их.

**Задача 4.** Найдите $\max_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{n}$.

**Задача 5.** Пусть $f$ — непрерывная периодическая функция на прямой. Для каждого $h\neq 0$ положим $f_h(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

**1)** $f$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, и ее производная $f'$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

**2)** функции $f_h$ равномерно сходятся на $\mathbb{R}$ при $h\to 0$.

**Задача 6.** Пусть функция $f$ непрерывна на $[x_0-h,x_0+h]$ и дважды дифференцируема на $(x_0-h,x_0+h)$. Докажите, что существует точка $c\in(x_0-h,x_0+h)$, такая, что $f''(c)=\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

**Задача 7.** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}=1$.