НМУ, 1 курс 11.11.2002

Математический анализ

Контрольная работа.

Задача 1. Найдите интегралы: **1)** $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$ **2)** $\int e^{\arccos x}\,dx$

Задача 2. Напишите разложение Тэйлора функции $\ln(\cos x)$ в нуле до членов 6-го порядка.

Задача 3. Вычислите предел $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Задача 4. Постройте кривые:

$$\textbf{1)}\ \begin{cases} x(t) = 2e^t - e^{2t} \\ y(t) = t^2 e^t \end{cases} \qquad \textbf{2)}\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^2 - t}{(t-1)^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{(t-1)^2} \end{cases}$$

Задача 5. Вычислите предел $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} + \cdots + n^{\alpha-1}}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

Задача 6. Пусть f — непрерывная функция на $[0,+\infty)$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$. Докажите, что $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = a$.

Задача 7. 1) Докажите, что существует константа $C > 0$, такая, что для любой функции $f \in C^2[0,1]$, у которой $f(0) = f(1) = 0$, выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant C \max_{t\in[0,1]} |f''(t)|$ при всех $x \in [0,1]$.

2) Укажите наименьшую константу C с таким свойством.