Действительные числа. Пределы.

Задача 1. Докажите, что $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Задача 2. Докажите, что для любых различных $a, b \in \mathbb{R}$ либо $a < b$, либо $b < a$.

Задача 3. Докажите, что $a+b = b+a$, $\quad (a+b)+c = a+(b+c)$, $\quad (a+b)c = ac+bc$ для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Дайте определение $\sqrt[a]{b}$, где $a \in \mathbb{N}$, $\ b \in \mathbb{R}$, $\ b > 0$.

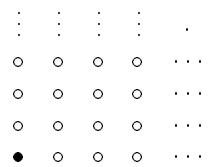
Задача 5. Приведите пример иррационального числа.

Задача 6. Дайте определение a^b, где $a, b \in \mathbb{R}$, $\ a > 0$.

Задача 7. Есть ли такие $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, что **а)** $a+b \in \mathbb{Q}$ **б)** $ab \in \mathbb{Q}$ **в)*** $a^b \in \mathbb{Q}$?

Задача 8. Рационально ли число $\sin 20^o$?

Задача 9. На плоскости в точках с целыми неотрицательными координатами сидят зайцы, диаметром 0,001 каждый. В начале координат стоит охотник с ружьем, стреляющим бесконечно далеко. Докажите, что, под каким бы углом $\alpha \in (0^o, 90^o)$ к оси абсцисс охотник ни выстрелил, он попадет в зайца (то есть пуля пройдет мимо центра одного из зайцев на расстоянии меньшем, чем радиус зайца).



Задача 10. Докажите, что у любой последовательности существует не более одного предела.

Задача 11. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a+b$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (последнее в случае $b \neq 0$).

Задача 12. Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, что $2^n > n^{1000}$.

Задача 13. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$ (последнее при $a > 1$).

Задача 14. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ при любых $k \in \mathbb{N}$, $\ a > 1$.

Задача 15. Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, что $1000^n < n!$

Задача 16. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ при любом $a > 1$.

Задача 17. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Задача 18. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Задача 19. а) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$.
б) Приведите пример, показывающий, что обратное не верно.