НМУ, 1 курс 25.11.2002

Математический анализ

Функциональные ряды.

Задача 1. Исследуйте ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ на сходимость и на равномерную сходимость на отрезках $[0,1-\delta]$ и $[0,1]$.

Задача 2. Исследуйте ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, где $\alpha\in\mathbb{R}$, на сходимость и на равномерную сходимость на множествах **1)** $[0,+\infty)$, **2)** $[\delta,+\infty)$, **3)** $(0,+\infty)$.

Задача 3. Преобразование Абеля.
Докажите, что для любых чисел $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ верно равенство $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=a_nB_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}B_k(a_{k+1}-a_k)$, где $B_k=\sum\limits_{j=1}^{k}b_j$.

Задача 4. Признак Дирихле.

$$\text{Пусть } \sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x) \text{ — функциональный ряд;} \quad a_n,b_n: X\to\mathbb{R}. \tag{S}$$

Пусть **1)** $\forall x \quad \{a_n(x)\}$ монотонна; $\quad a_n\rightrightarrows 0$ на X; **2)** $\exists C:\forall x,N \quad \left|\sum\limits_{n=1}^{N}b_n(x)\right|\leqslant C$.
Докажите, что (S) равномерно сходится.

Задача 5. Признак Абеля.
Пусть **1)** $\forall x \quad \{a_n(x)\}$ монотонна; $\exists C:\forall x,n \quad |a_n(x)|\leqslant C$; **2)** ряд $\sum_n b_n(x)$ равномерно сходится.
Докажите, что (S) равномерно сходится.

Задача 6. Исследуйте на сходимость и на равномерную сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$, где $p\in\mathbb{R}$.

Задача 7. Пусть $\{f_n\}\subset C[a,b]$, $\quad f_n\rightrightarrows f$ на (a,b).
Докажите, что f продолжается до непрерывной функции на $[a,b]$, и $f_n\rightrightarrows f$ на $[a,b]$.

Задача 8. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)=f(x)$ при всех $x\in[a,b]$, $\quad f\in C[a,b]$, $\quad a_n\in C[a,b]$, $\quad a_n\geqslant 0$.
Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится равномерно. Верно ли это утверждение без условия $f\in C[a,b]$?

Задача 9. Пусть $R>0$ — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\quad E=\{x\in\mathbb{R}\mid \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ сходится $\}$.

A) Придумайте ряды, для которых **1)** $E=[-R,R]$, **2)** $E=(-R,R]$, **3)** $E=[-R,R)$, **4)** $E=(-R,R)$.

B) Каким может быть множество, на котором ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ равномерно сходится?

Задача 10. Найдите радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n^2}}{2^n}$.

Задача 11. Найдите сумму ряда **1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

Задача 12. Чему равно $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$?

Задача 13. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — степенной ряд, $\quad R>0$ — его радиус сходимости, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ сходится.
Докажите, что сумма ряда $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ непрерывна на $[0,R]$.