Предел последовательности. Полнота множества действительных чисел.

Задача 1. Докажите неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$, где $n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$.

Задача 2. (Теорема о двух милиционерах.) Пусть $a_n \leq b_n \leq c_n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. Докажите, что тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Задача 3. Пусть $a_n \sim b_n$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Докажите, что тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Задача 4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{R}$. Исследовать, существуют ли следующие пределы, и чему они могут быть равны: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+c_n)$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n$; **4)** $\lim\limits_{n\to\infty} 1/c_n$; **5)** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$; **6)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Определение. Точная верхняя грань ограниченного сверху множества $M \subset \mathbb{R}$ — это число $\sup M = \min\{c \in \mathbb{R} : x \leq c\ \forall x \in M\}$ (эквивалентно: число $m \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью множества M, если $x \leq m\ \forall x \in M$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : m - \varepsilon < x \leq m$).

Задача 5. Докажите, что следующие пять формулировок свойства полноты действительных чисел эквивалентны между собой.

1) Любая последовательность Коши сходится.

2) Если $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков, то $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$.

3) Если $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков, и $\lim\limits_{n\to\infty}(\text{длина } I_n) = 0$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$.

4) Любое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

5) Любая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

Определение. Говорят, что множество $M \subset \mathbb{R}$ компактно, если для любого семейства интервалов $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, такого, что $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \supset M$, найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, что $U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n} \supset M$.

Задача 6. Докажите, что следующие два утверждения эквивалентны:

1) Любая ограниченная последовательность в $\mathbb{R}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

2) Любой отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ компактен.

Определение. Функции f и g, определенные в некоторой окрестности точки x_0, называются эквивалентными при $x \to x_0$ (обозначение: $f \sim g\ (x \to x_0)$), если существует такая функция h, определенная в некоторой окрестности x_0, что $f = gh$ в некоторой проколотой окрестности x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$.

Задача 7. Если $f_1 \sim f_2\ (x \to x_0)$, $f_2 \sim f_3\ (x \to x_0)$, то $f_1 \sim f_3\ (x \to x_0)$.

Задача 8. Пусть $f_1 \sim g_1\ (x \to x_0)$ и $f_2 \sim g_2\ (x \to x_0)$.

1) Докажите, что $f_1 f_2 \sim g_1 g_2\ (x \to x_0)$.

2) Если f_2 и g_2 не обращаются в 0 в некоторой окрестности x_0, то $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}\ (x \to x_0)$.

3) Верно ли, что $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2\ (x \to x_0)$?

Задача 9. Числами Фибоначчи называется последовательность $\{f_n\}$, заданная рекуррентно: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$, и найдите его.