МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Пределы и непрерывность.

Задача 1. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n^3+4)^8}{(2n^2+7n-9)^{12}}$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-2})$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

Задача 2. Докажите, что существует предел $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (он называется *числом* e).

Задача 3. Докажите, что следующие последовательности $\{x_n\}$ имеют пределы, и найдите их:

1) $x_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}}_{n}$; **2)** $x_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}}_{n}$; **3)** $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, где числа p_n, q_n определены рекуррентно: $p_0 = 0, q_0 = 1, p_{n+1} = p_n + q_n, q_{n+1} = 2p_n + q_n$.

Задача 4. Имеют ли пределы следующие последовательности:
1) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$;
2) $x_n = 1 + \frac{1}{2^{1+\delta}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\delta}} \quad (\delta > 0)$;
3) $x_n = 1 + \frac{1}{2\log 2} + \cdots + \frac{1}{n\log n}$;
4) $x_n = 1 + \frac{1}{2\log(\log 2)} + \cdots + \frac{1}{n\log(\log n)}$.

Задача 5. Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$?

Задача 6. Пусть $f: I \to \mathbb{R}$ — функция, и $c \in I$. Известно, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$. Верно ли, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: при $|x - c| < \delta$, $x \in I$ выполнено $|f(x) - \ell| < \varepsilon$?

Задача 7. Пусть $f: I \to \mathbb{R}$ — функция, и $c \in I$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell \iff$ для любой последовательности $\{x_n\} \subset I \setminus \{c\}$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Задача 8. Пусть f и g — функции на прямой. Известно, что $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$. Верно ли, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = b$?

Задача 9. Пусть $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ — монотонная функция, и $c \in (a,b)$. Докажите, что существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$.

Задача 10. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Задача 11. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+3}{x-2})^{2x+1}$.

Задача 12. Докажите непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0, +\infty)$.

Задача 13. Докажите, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

всюду разрывна.

Задача 14. Докажите, что функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ — несократимая дробь;} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

непрерывна в иррациональных точках и разрывна в рациональных.

Задача 15.* Существует ли функция, непрерывная в рациональных точках и разрывная в иррациональных?

Задача 16. Докажите, что на экваторе найдутся две диаметрально противоположные точки, температура в которых одинакова.

Задача 17.* На сковородке лежат два блина. Докажите, что их можно разрезать одним взмахом ножа так, что каждый распадется на два куска одинаковой площади[1].

Задача 18. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.
1) Докажите, что если f непрерывна, то $f(x) = ax$ для всех x (где $a = f(1)$).
2)* Докажите, что если f разрывна, то она неограничена на любом интервале.

Задача 19. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций на $[a, b]$, равномерно сходящаяся к функции f. Докажите, что f непрерывна.

Задача 20. 1) Постройте последовательность непрерывных функций f_n, поточечно сходящуюся к функции Римана.
2)* Существует ли последовательность непрерывных функций, поточечно сходящаяся к функции Дирихле?

[1] Строго говоря, мы еще не знаем, что такое площадь, поэтому считайте, что блины многоугольные.