Математический анализ

Обратная функция. Производная.

Задача 1. Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке. Докажите, что у нее есть обратная, и она непрерывна.

Задача 2. Пусть функции u и v определены в окрестности точки x и дифференцируемы в x. Докажите, что функции $u+v$, uv, а также u/v (при условии $v(x)\neq 0$) дифференцируемы в x, и что $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$, $(uv)'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, $(\frac{u}{v})'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Задача 3. Найдите производную функции $f(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+100)$ в точке $x=-1$.

Задача 4. 1) Дайте определение правой производной $f'_+(x_0)$ и левой производной $f'_-(x_0)$,
2) Пусть f дифференцируема на $[x_0, x_0+h)$. Верно ли, что $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} f'(x)$?

Задача 5. Докажите, что $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Задача 6. Найдите производные функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Задача 7. Вычислите пределы: **1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$; **1)** $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$; **3)** $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

Задача 8. Найдите производные функций a^x, $\log_a x$, x^α.

Задача 9. Придумайте функцию f на прямой, которая непрерывна только в одной точке и в ней дифференцируема.

Определение. Пусть функция f дифференцируема в точке $x_0\in\mathbb{R}$. Прямая $y = kx+b$ называется касательной к графику функции f в точке x_0, если $f(x) = kx+b+o(x-x_0)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-kx-b}{x-x_0} = 0$.

Задача 10. Докажите, что касательная к графику f, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$, задается уравнением $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Задача 11. На плоскости в точке $(p/2, 0)$ находится источник света. Докажите, что лучи, выпущенные из источника, после отражения от параболического зеркала $y^2 = 2px$ распространяются параллельно друг другу.

Задача 12. Пусть функция f дифференцируема на прямой, и $f'(x_0) > 0$. Верно ли, что f возрастает в некоторой окрестности x_0?

Задача 13. Найдите все дифференцируемые функции y на прямой, удовлетворяющие уравнению $y' = \lambda y$ ($\lambda\in\mathbb{R}$ — фиксированное число).

Задача 14. (Теорема Коши). Пусть функция f дифференцируема на интервале I, и пусть $[a,b]\subset I$. Докажите, что на отрезке $[a,b]$ $f'(x)$ принимает все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$. (**Указание:** рассмотрите частный случай, когда $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки.)