Интеграл.

Задача 1. Пусть $f, g \in C[a,b]$. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда

1) $\int\limits_a^b (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int\limits_a^b f dx + \mu \int\limits_a^b g dx$; **2)** $|\int\limits_a^b f dx| \leqslant \int\limits_a^b |f| dx$;

3) $\min\limits_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f dx \leqslant \max\limits_{[a,b]} f$; **4)** $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f dx \leqslant \int\limits_a^b g dx$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи доказать, что $\exists c \in (a,b) : \int\limits_a^b f dx = f(c)(b-a)$.

Найти интегралы:

Задача 3. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

Задача 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Задача 5. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Задача 6. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$.

Задача 7. $\int (\frac{\ln x}{x})^2 dx$.

Задача 8. $\int \frac{dx}{x^4+4}$.

Задача 9. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^4 x}$.

Задача 10. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

Задача 11. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^{x-2}}$.

Задача 12. $\int \frac{dx}{((x-1)(x+1)^2)^{1/3}}$.

Задача 13. Придумайте способ, позволяющий вычислять интегралы вида **а)** $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$; **б)** $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$; **в)** $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\, dx$, где R – рациональная функция.
Указание. Пусть $t = \operatorname{tg} \varphi$ (см. картинку). Найдите $x(t)$ и $y(t)$.

Задача 14. Вычислите $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.