Математический анализ

Интеграл.

Задача 1. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int \operatorname{tg} x\,dx;\quad 2)\ \int \frac{dx}{\cos^4 x};\quad 3)\ \int \frac{dx}{x^3+x^2+x+1};\quad 4)\ \int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^{15}};$$

$$5)\ \int x^3 e^{-x^2}dx;\quad 6)\ \int e^{ax}\cos bx\,dx;\quad 7)\ \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x};$$

$$8)\ \int \frac{\sin x\cos x\,dx}{1+\sin^4 x};\quad 9)\ \int \frac{dx}{(1+e^x)^2};\quad 10)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

Задача 2. (Метод прямоугольников). Пусть $f \in C^1[a,b]$ (т.е. f — дифференцируемая функция на $[a,b]$, производная которой непрерывна). Для каждого n разобьем $[a,b]$ на n равных частей точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, и рассмотрим ступенчатую функцию g_n, равную $f(t_k)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 0,\dots,n-1$). Докажите, что

$$\Bigl|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g_n(t)\,dt\Bigr| < M_1\frac{(b-a)^2}{2n},$$

где $M_1 = \max_{t\in[a,b]}|f'(t)|$.

Задача 3. (Метод трапеций). Пусть $f \in C^2[a,b]$ (т.е. f — дважды дифференцируемая функция на $[a,b]$, вторая производная которой непрерывна). Для каждого n разобьем $[a,b]$ на n равных частей точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, и рассмотрим кусочно-линейную функцию h_n, график которой над каждым отрезком разбиения $[t_k, t_{k+1}]$ представляет собой отрезок с концами $(t_k, f(t_k))$ и $(t_{k+1}, f(t_{k+1}))$. Докажите, что

$$\Bigl|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b h_n(t)\,dt\Bigr| < M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где $M_2 = \max_{t\in[a,b]}|f''(t)|$.

Определение 1. Говорят, что функция f *выпукла вверх на отрезке* $[a,b]$, если $\forall\, x,y \in [a,b]$ и $\forall\,\lambda,\mu \in [0,1]$ таких, что $\lambda+\mu = 1$, выполнено $f(\lambda x+\mu y) \ge \lambda f(x)+\mu f(y)$ (т.е. если отрезок, соединяющий точки $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$, находится ниже, чем график f на отрезке $[x,y]$).

Задача 4. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для ее выпуклости вверх достаточно, чтобы условие предыдущего определения выполнялось для $\lambda = \mu = 1/2$.

Задача 5. Функция f, непрерывная на отрезке $[a,b]$, выпукла вверх тогда и только тогда, когда $\forall\, x,h$ таких, что $[x-h, x+h] \subset [a,b]$, выполнено $f(x) \ge \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$.

Определение 2. Кривая C на плоскости задана параметрически: $t \mapsto (x(t), y(t))$, где $x,y \in C^1[a,b]$ — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$. Каждому разбиению $\tau = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ отрезка $[a,b]$ сопоставим числа $L(\tau)$ и $\lambda(\tau)$. Через $L(\tau)$ мы обозначаем длину ломаной с вершинами в точках $(x(t_i), y(t_i))$, $i = 0,\dots,n$, а через $\lambda(\tau)$ мы обозначаем диаметр разбиения τ, равный $\max_{i=1,\dots,n}(t_i - t_{i-1})$. *Длиной* кривой C называется предел длин ломаных $L(\tau)$ по всем возможным разбиениям, при $\lambda(\tau) \to 0$.

Задача 6. Доказать, что длина кривой C вычисляется по формуле

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Задача 7. Колесо радиуса R катится без проскальзывания. Найти длину пути, который проходит точка колеса, находящаяся на расстоянии R от его центра, за один полный оборот.

Задача 8. Парабола $x^2 = 2py$ катится по оси Ox. Какую кривую описывает ее фокус (т.е. точка с координатами $(0, \frac{p}{2})$)?