# Математический анализ

## Формула Тэйлора.

**Задача 1.** Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задана в окрестности точки $x_0$, причём

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0).$$

Найдите числа $a_0,a_1,\dots,a_n$.

**Задача 2.** Напишите разложения Тейлора (до $n$-ого члена) при $x=0$ для следующих функций:
1) $\ln(1+x)$; 2) $\operatorname{arctg}x$; 3) $(1+x)^\alpha$ (где $\alpha\in\mathbb{R}$); 4) $\arcsin x$; 5) $\frac{1}{1-3x+2x^2}$.

**Задача 3.** Выпишите первые три члена в разложении Тейлора при $x=0$ для следующих функций:
1) $\frac{1}{\cos x}$; 2) $e^{\sin x}$; 3) $\sqrt{\cos x}$.

**Задача 4.** Найдите недостающие члены разложения Тейлора функции arctg при $x\to+\infty$:

$$\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\quad ???\quad+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

**Задача 5.** Найдите неизвестные $A,B,\alpha,\beta$ ($\alpha>0,\ \beta\ge\alpha+1$) в разложении функции arcsin при $x\to1-0$:

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}+A(1-x)^\alpha+B(1-x)^\beta+o\big((1-x)^\beta\big)$$

**Задача 6.** Пусть $D=\frac{d}{dt}:\mathbb{R}[t]\to\mathbb{R}[t]$ — оператор дифференцирования. Определите оператор $e^D:\mathbb{R}[t]\to\mathbb{R}[t]$. Каким образом он действует на произвольном многочлене?

**Задача 7.** Вычислите следующие пределы:
1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{1/x}-\sqrt{x^6+x^3}\Big)$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\operatorname{sh}x)-\operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}$.

**Задача 8.** Найдите рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов $a_k$ для разложения

$$\operatorname{tg}x=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}x^k+o(x^n)\qquad(x\to0).$$

(*Указание*: $(\operatorname{tg}x)'=\operatorname{tg}^2x+1$.) Докажите, что ненулевые числа $a_k$ в разложении — натуральные числа.

**Задача 9.** 1) Пусть $f(x)=e^{-1/x^2}$ при $x\ne0$, и $f(0)=0$. Найдите все производные $f^{(n)}(0)$ функции $f$ в нуле.

2) Для произвольного положительного $a$ постройте функцию $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi\not\equiv0$ такую, что $\forall x:|x|\ge a$ выполняется $\varphi(x)=0$.

3) Для произвольного отрезка $[a,b]\subset\mathbb{R}$ и любого положительного $\varepsilon$ постройте $f\in C^\infty(\mathbb{R}):f(x)=1$ на $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$; $f(x)=0$ вне $[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$ $(0\le f\le1)$.

**Задача 10. Свёртка и сглаживание пеньков.**

**Определение.** Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *финитной*, если $f(x)=0$ вне некоторого отрезка. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *кусочно непрерывной*, если на любом отрезке $f$ имеет лишь конечное число разрывов первого рода.
Пусть функции $f$ и $g$ кусочно непрерывны, и одна из них финитна. Их *свёрткой* называется функция

$$(f*g)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f(t)g(x-t)dt.$$

1) Докажите, что свёртка $f*g$ кусочно непрерывна;
2) Докажите, что $f*g=g*f$;
3) Пусть $g$ непрерывна, тогда $f*g$ непрерывна;
4) Пусть $g\in C^n(\mathbb{R})$, тогда $f*g\in C^n(\mathbb{R})$, и $f*g^{(k)}=(f*g)^{(k)}$ $(k=1,\dots,n)$;
5) Для произвольного положительного $\varepsilon$ постройте функцию $\varphi_\varepsilon\in C(\mathbb{R})$, такую, что $\varphi_\epsilon\ge0$, $\varphi_\epsilon=0$ вне отрезка $[-\varepsilon,\varepsilon]$, и $\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon(t)dt=1$. Докажите, что функции $f*\varphi_\varepsilon$ равномерно сходятся к функции $f$ при $\varepsilon\to0$ на любом отрезке $[a,b]$, в окрестности которого $f$ непрерывна.