Математический анализ, 1 курс
Построение кривых

28 октября 2002

Задача 1. Постройте следующие кривые:

$$1)\ \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases};\quad 2)\ \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^5 \end{cases};\quad 3)\ \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^4 + t^6 + t^7 \end{cases};\quad 4)\ \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases};$$

$$5)\ \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases};\quad 6)\ \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases};\quad 7)\ \begin{cases} x = 2t^3 - 3t \\ y = t^4 - t^2 \end{cases};\quad 8)\ \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases};$$

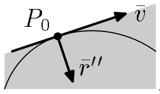
$$9)\ \begin{cases} x = \frac{3t}{t^3+1} \\ y = \frac{3t^2}{t^3+1} \end{cases};\quad 10)\ \begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases};\quad 11)\ \begin{cases} x = t^3 - t^2 \\ y = t^4 - t^3 \end{cases}.$$

(*Замечание.* В пункте 8 кривую полезно записать в виде $f(x, y) = 0$.)

Пусть кривая $\bar{r}(s)$ (где $\bar{r} \in C^1$) задана в параметрическом виде: $\bar{r}(s) = \big(x(s), y(s)\big)$. Обозначим через $\bar{v}(s) = \bar{r}'(s) = \big(x'(s), y'(s)\big)$ вектор скорости кривой.

Определение 1. Параметризация кривой называется *натуральной*, если модуль вектора скорости $\bar{v}(s)$ тождественно равен единице на всей кривой ($|\bar{v}| \equiv 1$). (В качестве примера приведём окружность с натуральной параметризацией: $\bar{r}(s) = (\cos s, \sin s)$.)

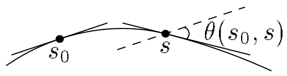
Задача 2. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(t)$ — параметризованная кривая, причём вектор скорости r' ни в какой точке в нуль не обращается. Тогда на этой кривой можно ввести натуральную параметризацию.

Задача 3. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(s)$ — кривая с натуральной параметризацией. Докажите, что
1) вектор скорости $\bar{r}'$ ортогонален вектору ускорения $\bar{r}''$;
2) если в некоторой точке s_0 ускорение $\bar{r}''$ не равно нулю, то вектор $P_0 + \bar{r}''$ и кусок кривой в маленькой окрестности точки s_0 лежат по одну сторону от касательной: 

.

Определение 2. Если $\bar{r}'' \neq 0$ в точке s_0, то вектор $\bar{n} = \frac{\bar{r}''}{|\bar{r}''|}$ называется вектором *главной нормали* в этой точке.

Определение 3. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(s)$ — кривая с натуральной параметризацией. Зафиксируем точку $P_0 = \bar{r}(s_0)$ и обозначим через $\theta(s_0, s)$ угол между касательными к кривой в точках P_0 и $P = \bar{r}(s)$ (см. рис.):

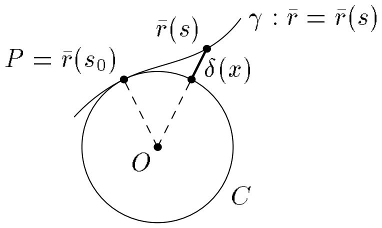


Если существует предел $\lim\limits_{s \to s_0} \frac{\theta(s_0,s)}{s-s_0}$, то он называется *кривизной* кривой в точке P_0 и обозначается через $k(s_0)$.

Задача 4. 1) Если параметризация кривой натуральная, то $k(s) = |\bar{r}''(s)|$.
2) Найдите формулу для кривизны в случае произвольной параметризации.

Задача 5. Опишите все кривые, кривизна которых: а) нулевая; б)* постоянная.

Задача 6. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(s)$ — кривая с натуральной параметризацией. Зафиксируем точку $P_0 = \bar{r}(s_0)$, возьмем произвольную точку O и построим окружность C с центром в O. Для каждого s положим $P = \bar{r}(s)$ и отметим на прямой PO точку Q, лежащую на C (при этом берем ту из точек пересечения, которая ближе к P). Положим $\delta(s) = |PQ|$.



Что означает условие: 1) $\delta(s) = o(1)$ при $s \to s_0$; 2) $\delta(s) = o(s - s_0)$ при $s \to s_0$?

Определение 4. Окружность C называется *соприкасающейся* с кривой $\bar{r} = \bar{r}(s)$ в точке $P_0 = \bar{r}(s_0)$, если $\delta(s) = o\big((s - s_0)^2\big)$ при $s \to s_0$.

Задача 7. Пусть кривизна кривой γ отлична от нуля в некоторой точке s_0, тогда у кривой γ существует и единственна соприкасающаяся окружность (в точке s_0), при этом вектор $\overline{PO}$ сонаправлен $\bar{n}(s_0)$, и $|\overline{PO}| = \frac{1}{k(s_0)}$.

Определение 5. *Эволютой* кривой γ называется геометрическое место центров соприкасающихся окружностей.

Задача 8. Найдите и постройте эволюту эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.