Математический анализ

Ряды.

Задача 1. Пусть $a_n \geq 0$. Тогда $\sum\limits_n a_n$ сходится $\Longleftrightarrow \exists C : \forall N \ \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \leq C$.

Задача 2. Исследовать на сходимость:

1) $\sum\limits_n \dfrac{x^n n!}{n^n}$ $(x \geq 0)$ **2)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ **3)** $\sum\limits_n \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$ **4)** $\sum\limits_n \frac{1}{n^p}$ $(p \in \mathbb{R})$

Задача 3. Придумать пример последовательности $\{\alpha_n\}$: $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \downarrow 0$ и

1) $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^{1+\alpha_n}}$ сходится **2)** $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^{1+\alpha_n}}$ расходится.

Задача 4. Исследовать на сходимость:

1) $\sum\limits_n \dfrac{1}{n \ln^p n}$ **2)** $\sum\limits_n \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$ **4)** $\sum\limits_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right)$ **5)** $\sum\limits_n \frac{\cos n}{n}$ **6)** $\frac{|\cos 2^n|}{n}$

Задача 5. Пусть

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если в десятичной записи } n \text{ нет } 7 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Сходится ли ряд $\sum\limits_n \dfrac{\chi(n)}{n}$?

Задача 6. Пусть $a_n > 0$, $a_n \searrow 0$. Докажите теорему Коши:

$$\sum_n a_n \quad \text{сходится} \Longleftrightarrow \sum_n 2^n a_{2^n} \quad \text{сходится.}$$