Задачи по курсу “Рациональные особенности”, листок 1.

Срок сдачи 16 сентября 2002 (письменно; на лекции или в учебную часть).

1. а) Покажите, что многообразие Y нормально $\Leftrightarrow$ $\pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}) = \mathcal{O}_Y$, где $\pi : \widetilde{Y} \to Y$ — разрешение особенностей.

б) Покажите, что многообразие Y имеет рациональные особенности $\Leftrightarrow R\pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}) = \mathcal{O}_Y$, где $\pi : \widetilde{Y} \to Y$ — разрешение особенностей, а равенство означает изоморфизм в производной категории.

в) Приведите пример двух комплексов, гомологии которых изоморфны, но сами комплексы не изоморфны в производной категории. Каково минимальное число элементов кольца, из модулей над которым можно составить такой пример?

2. а) Выведите важный частный случай теоремы Буто из критерия Ковача.

б) Покажите, что особенность $\Bbbk[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^7)$ не рациональна.

3. Показать, что $f : X \to Y$ тогда и только тогда является морфизмом конечного типа, когда для любого аффинного открытого $U \subset Y$ существует конечное покрытие $f^{-1}(U)$ спектрами конечно порождённых $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$-алгебр, и тогда для любого аффинного открытого $V \subset f^{-1}(U)$ $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ — КП $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$-алгебра.

4. а) Покажите, что морфизм аффинных схем отделим.

б) Пусть S — некоторая схема, X приведённая и Y — отделимая схемы над S. Пусть f и g суть S-морфизмы из X в Y, совпадающие на плотном открытом подмножестве X. Покажите, что $f = g$, но что если X не приведена или Y не отделима над S, то это неверно. (Указание: рассмотрите отображение $X \to Y \times_S Y$, построенное по f и g.)

5. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм отделимых схем конечного типа над нётеровой схемой S, а Z — замкнутое подмножество в X, собственное над S. Покажите, что $f(S)$ замкнута в Y и собственна над S.