Задачи по курсу “Рациональные особенности”, листок 2.

Срок сдачи 23 сентября 2002 (письменно; на лекции или в учебную часть).

6. (Сорит для морфизмов.) Пусть $\mathcal{P}$ — такое свойство морфизмов схем, что

1) замкнутое вложение им обладает;

2) композиция двух морфизмов, обладающих $\mathcal{P}$, обладает им;

3) $\mathcal{P}$ стабильно относительно расширения базы.

Покажите, что тогда

4) произведение $X_1 \times_S X_2 \to Y_1 \times_S Y_2$ морфизмов $X_i \to Y_i$ над S, обладающих $\mathcal{P}$, обладает им;

5) если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — два морфизма, причём $g \circ f$ обладает $\mathcal{P}$, а g отделим, то f также обладает $\mathcal{P}$ (указание: морфизм вложения графика $X \to X \times_Z Y$ получается из диагонали $Y \to Y \times_Z Y$ расширением базы);

6) если морфизм $f : X \to Y$ обладает $\mathcal{P}$, то $f_{\mathrm{red}} : X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ тоже обладает $\mathcal{P}$.

7. а) Покажите, что условия предыдущей задачи выполнены для проективных морфизмов.

б) Покажите, что если все схемы предполагать нётеровыми, то условия предыдущей задачи выполнены для отделимых и для собственных морфизмов.

в) Покажите, что понятия отделимого и собственного морфизма локальны по базе, то есть если $f : X \to Y$ — морфизм и для любой точки $y \in Y$ найдтся такая окрестность U, что $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ отделим (собствен), то и f таков.