Задачи по курсу “Рациональные особенности”, листок 3.

Срок сдачи 7 октября 2002 (письменно; на лекции или в учебную часть).

**8.** Будем называть открытую подсхему $U \subset X$ *схемно плотной в* $X$, если $U$ плотно в $X$ и соответствующий гомоморфизм пучков $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_U$ (т.е. $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(V \cap U)$) инъективен.

а) Докажите, что если два морфизма $f, g\colon X \to Y$ совпадают на схемно плотной подсхеме $X$, а $Y$ отделима, то они совпадают на всей $X$.

б) Пусть схема $X$ нётерова. Докажите, что $U$ схемно плотно в $X$ $\Leftrightarrow U \cap Z$ плотно (топологически) в каждой ассоциированной замкнутой подсхеме $Z$ схемы $X$ (так как ассоциированные простые идеалы локализуются, то их можно склеить в подсхему).

**9.** Покажите, что построенный $Rf_* : D(X) \to D(Y)$ действительно является производным функтором на неограниченной производной категории (по поводу неограниченной производной категории и общего определения производного функтора см. Хартсхорн ”Residues and Duality” (LNM 20), гл. I, или Гельфанд–Манин).

**10.** Покажите, что если $I$ — инъективный $\mathcal{O}_X$-модуль на окольцованном пространстве $X$, $F$ — $\mathcal{O}_X$-модуль, то пучок $\mathcal{H}om(F, I)$ — вялый (указание: в категории $\mathcal{O}_X$-модулей есть понятие продолжения пучка нулём с открытого подмножества).

**11.** Опишите естественный морфизм $f_*\,\mathcal{H}om(F, G) \to \mathcal{H}om(f_*F, f_*G)$.